Problèmes inverses pour l'équation de Newton-Einstein pluridimensionnelle

Alexandre Jollivet

UNIVERSITÉ DE NANTES

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2007 N° B.U. : | | | | | | | | | | |

Problèmes inverses pour l'équation de Newton–Einstein pluridimensionnelle

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Alexandre JOLLIVET

le 6 juillet 2007 à l'Université de Nantes

devant le jury ci-dessous

Président du jury	:	Didier ROBERT	Professeur	(Nantes)
Rapporteurs	:	Mikhail BELISHEV	Head scientific researcher	(St.-Petersbourg)
		Piotr GRINEVICH	Senior scientific researcher	(Moscou)
Examinateurs	:	Roman NOVIKOV	DR du CNRS	(Nantes)
		Vesselin PETKOV	Professeur	(Bordeaux)
		Xue-Ping WANG	Professeur	(Nantes)
		Dimitri YAFAEV	Professeur	(Rennes)

Directeur de thèse	:	Roman NOVIKOV
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)
N° E.D.	:	0366 - 307

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, Roman Novikov. Il m'a intéressé aux Problèmes Inverses, initié au monde de la recherche, guidé durant ses trois dernières années. Ses conseils ont toujours été précieux. Je l'en remercie infiniment.

J'exprime ma plus vive gratitude envers Mikhail Belishev et Piotr Grinevich pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ainsi que pour leurs commentaires.

Je remercie Piotr Grinevich, Vesselin Petkov, Didier Robert, Xue-Ping Wang et Dimitri Yafaev pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.

Je remercie l'ensemble des personnes constituant le département de Mathématiques de Nantes et le laboratoire Jean Leray. Évoluer parmi vous depuis la Licence (actuelle L3) fut un plaisir.

Je remercie, en particulier, l'ensemble des doctorants nantais pour les moments partagés durant la préparation de cette thèse.

Enfin je remercie ma famille pour leur appui dans la vie.

Table des matières

Introduction

L'objectif d'un problème de diffusion inverse ou d'un problème inverse de valeurs aux bords est de reconstruire la structure d'un objet à partir des données de diffusion, ou à partir des données de valeurs aux bords. Ces problèmes sont posés naturellement dans les domaines de la physique nucléaire, de la géophysique, de la médecine, etc...

Dans cette thèse, on considère l'équation de Newton-Einstein pluridimensionnelle dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\nabla V(x(t)) + \frac{1}{c}B(x(t))\dot{x}(t), \qquad (0.0.1)\\ p(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \Omega$, $p(t) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$, $V \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ et $B = (B_{i,k}) \in C^1(\bar{\Omega}, A_n(\mathbb{R}))$ vérifie la condition de fermeture suivante :

$$\frac{\partial B_{i,k}}{\partial x_l}(x) + \frac{\partial B_{l,i}}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial B_{k,l}}{\partial x_i}(x) = 0, \qquad (0.0.2)$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\Omega}$ et $i, k, l = 1 \ldots n$ ($A_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques réelles). L'ouvert Ω sera soit $\mathbb{R}^n$, soit un domaine D ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, strictement convexe au sens fort, de frontière de classe C^2. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on supposera aussi que V et B vérifient les conditions suivantes de décroissance :

$$\begin{aligned} |\partial_x^j V(x)| &\leq \beta_{|j|}(1 + |x|)^{-(\alpha+|j|)}, \qquad (0.0.3)\\ |\partial_x^{j'} B_{i,k}(x)| &\leq \beta_{|j'|+1}(1 + |x|)^{-(\alpha+|j'|+1)}, \qquad (0.0.4) \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|j| \leq 2$, $|j'| \leq 1$ ($j, j' \in \mathbb{N}^n$) où $\alpha > 1$ est une constante réelle et les $\beta_{|j|}$ sont des constantes réelles positives.

Pour l'équation (0.0.1), l'énergie

$$E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p(t)|^2}{c^2}} + V(x(t)) \qquad (0.0.5)$$

est une intégrale première du mouvement.

Si $n = 3$ alors l'équation (0.0.1) est l'équation de mouvement d'une particule de masse $m = 1$ et de charge $e = 1$ dans un champ électromagnétique statique externe décrit par (V, B) (voir [Ein07] ou section 17 de [LL71]). Dans cette équation x est la position de la particule, p son impulsion, et t désigne le temps et la constante c est la vitesse de la lumière.

Dans cette thèse, on étudie le problème de diffusion inverse ($\Omega = \mathbb{R}^n$) pour l'équation (0.0.1) sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4) (voir Problème 2 formulé ci-dessous), et un problème inverse de valeurs aux bords ($\Omega = D$) pour l'équation (0.0.1) (voir Problème 4 formulé ci-dessous).

Pour le problème de diffusion inverse pour l'équation pluridimensionnelle (0.0.1), on a obtenu, en particulier, les résultats suivants.

L'asymptotique aux hautes énergies des données de diffusion pour l'équation (0.0.1) détermine de manière unique, par des formules explicites, le champ extérieur (i.e. le champ électromagnétique décrit par (V, B)) (Jollivet 2005).

À énergie fixée suffisamment grande, les données de diffusion déterminent de manière unique le champ extérieur lorsque celui-ci est aussi supposé à support compact (Jollivet 2006, 2007).

Pour le problème inverse de valeurs aux bords pour l'équation pluridimensionnelle (0.0.1), nous avons obtenu les résultats suivants.

À énergie fixée suffisamment grande, les données de valeurs aux bords déterminent de manière unique le champ extérieur (Jollivet 2006, 2007). De plus si le champ extérieur est uniquement électrique ou gravitationnel ($B \equiv 0$) alors, à énergie fixée suffisamment grande, les données de diffusion déterminent de manière unique et de façon stable le champ extérieur (Jollivet 2006).

Par ailleurs, dans le cadre de la mécanique classique non relativiste, on dispose de résultats analogues pour l'équation de Newton non relativiste dans un champ électromagnétique

$$\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t)) + B(x(t))\dot{x}(t), \tag{0.0.6}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \Omega$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $n \geq 2$. (L'énergie $E = \frac{|\dot{x}(t)|^2}{2} + V(x(t))$ est une intégrale première du mouvement pour (0.0.6).) Pour le problème de diffusion inverse pour l'équation (0.0.6) sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4), l'asymptotique aux hautes énergies des données de diffusion détermine de manière unique le champ extérieur par des formules explicites. Si $B \equiv 0$, alors ce résultat a d'abord été obtenu par [Nov99]. De plus, à énergie fixée suffisamment grande, les données de diffusion déterminent de manière unique le champ extérieur, lorsque le champ extérieur est aussi supposé à support compact (Jollivet 2007). Si $B \equiv 0$, alors ce dernier résultat a d'abord été obtenu par [Nov99].

Pour le problème inverse de valeurs au bord pour l'équation de Newton multidimensionnelle non relativiste (0.0.6), on a montré qu'à énergie fixée suffisamment grande les données de valeurs au bord déterminent de manière unique le champ extérieur (Jollivet 2007). Si $B \equiv 0$, alors ce résultat a d'abord été obtenu par [GN83].

L'ensemble de ces résultats ont été obtenus en généralisant et en développant des résultats et des méthodes des travaux de Novikov [Nov99] et de Gerver-Nadirashvili [GN83]. La généralisation de résultats de [GN83] a nécessité la généralisation et le développement de méthodes de travaux de Muhometov-Romanov [MR78], Beylkin [Bey79] et Bernstein-Gerver [BG80] sur le problème de la détermination d'une métrique riemannienne à partir de son hodographe (i.e. à partir de la donnée des longueurs des géodésiques entre tout couple de points frontière).

Nous allons maintenant détailler la structure de la thèse en donnant les principaux résultats, les méthodes utilisées et les commentaires historiques nécessaires.

Dans le premier chapitre de cette thèse, on rappelle quelques résultats sur le problème de diffusion directe sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4). On établit le résultat suivant.

Théorème 0.0.1. *Sous les conditions* (0.0.3)-(0.0.4)*, on a :*

(i) *pour tout* $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$, *il existe une unique solution de l'équation* (0.0.1) *telle que*

$$x(t) = v_- t + x_- + y_-(t), \tag{0.0.7}$$

où $\dot{y}_-(t) \to 0,\ y_-(t) \to 0$, *quand* $t \to -\infty$ *;*

(ii) *pour presque tout* $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n,\ v_- \neq 0$,

$$x(t) = v_+ t + x_+ + y_+(t), \tag{0.0.8}$$

où $v_+ = v_- + a_{sc}(v_-, x_-)$, $x_+ = x_- + b_{sc}(v_-, x_-)$, $\dot{y}_+(t) \to 0$, $y_+(t) \to 0$ *quand* $t \to +\infty$ *(on note* B_c *la boule euclidienne ouverte de centre 0 et de rayon c).*

On définit l'opérateur de diffusion $S : B_c \times \mathbb{R}^n \to B_c \times \mathbb{R}^n$ pour l'équation (0.0.1) par les formules

$$S(v_-, x_-) = (v_- + a_{sc}(v_-, x_-), x_- + b_{sc}(v_-, x_-)).$$

On note $\mathcal{D}(S)$ l'ensemble de définition de S. Les données $a_{sc}(v_-, x_-)$, $b_{sc}(v_-, x_-)$, $(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S)$, sont les données de diffusion pour l'équation (0.0.1).

En mécanique classique, pour l'étude de la diffusion directe, on peut citer les travaux de Simon [Sim71], Herbst [Her74], Yajima [Yaj82], Loss-Thaller [LT87] et le livre [DG97]. Notons que le Théorème 0.0.1, sous des conditions sur B plus fortes que les conditions (0.0.4), a été obtenu par Yajima [Yaj82].

Le Théorème 0.0.1 peut se démontrer en répétant les preuves de résultats donnés dans [Yaj82]. La preuve donnée dans le chapitre 1 du Théorème 0.0.1 correspond à la façon dont on aborde le problème de diffusion inverse aux hautes énergies dans le chapitre 2, et diffère de la preuve que l'on obtiendrait en répétant la preuve de certains résultats donnés dans [Yaj82].

En s'appuyant sur les résultats de Simon [Sim71] et de Loss-Thaller [LT87], on peut démontrer l'analogue du Théorème 0.0.1 pour l'équation (0.0.6) : il suffit de remplacer B_c par $\mathbb{R}^n$ dans l'énoncé du Théorème 0.0.1. On peut ainsi définir l'opérateur de diffusion S^{nr} pour l'équation (0.0.6) de la même manière que l'on a défini S (voir [Jol07a]).

On peut alors formuler de manière précise le problème de diffusion directe (Problème 1 ci-dessous) et le problème de diffusion inverse (Problème 2 ci-dessous) pour l'équation (0.0.1) sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4) :

Problème 1 : étant donnés $V, B,$ trouver l'opérateur de diffusion S ;
Problème 2 : étant donné $S,$ trouver V, B.

En remplaçant S par S^{nr} dans les deux problèmes précédents, on obtient les problèmes de diffusion directe et de diffusion inverse pour (0.0.6).

En dimension $n = 1$, des problèmes inverses pour l'équation de Newton non relativiste ont été étudiés par Abel [Abe26], Keller [Kel76] et Astaburuaga-Fernandez-Cortés [AFC91] et un problème inverse pour l'équation de Newton relativiste a été étudié par Funke-Ratis [FR90]. En ce qui concerne le problème de diffusion inverse en dimension 1 sous les conditions (0.0.3) pour les équations (0.0.1) et (0.0.6), il n'est pas possible de déterminer le champ extérieur à partir des données de diffusion : que ce soit en mécanique classique relativiste ou non relativiste, il existe des potentiels V_1, V_2 distincts qui vérifient les conditions (0.0.3) et qui ont le même opérateur de diffusion.

Dans le chapitre 2 on s'intéresse au problème de diffusion inverse pluridimensionnelle aux hautes énergies. On obtient, en particulier, le Théorème suivant qui donne, en particulier, l'asymptotique aux hautes énergies de la première composante de l'opérateur de diffusion S pour l'équation (0.0.1).

Théorème 0.0.2 ([Jol05b]). *Soit* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1} := \{(\theta', x') \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \mid \theta' x' = 0\}$, *et soit* r *une constante positive telle que* $0 < r \leq 1$, $r < c/\sqrt{2}$. *Sous les conditions* (0.0.3)-(0.0.4), *on a :*

$$\lim_{\substack{s \to c \\ s < c}} \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}} a_{sc}(s\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau\theta + x, c\theta) d\tau, \qquad (0.0.9)$$

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau\theta + x, s\theta)d\tau - \frac{s}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} a_{sc}(s\theta, x)\right| \leq \frac{n^3 2^{2\alpha+7}(1+\frac{1}{c})^2 c}{\alpha(\alpha-1)(\frac{s_1}{\sqrt{2}} - r)^4} \times \frac{\tilde{\beta}^2(\frac{c}{\sqrt{2}} + 1 - r)^2}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{4(c^2-s^2)}}(1+\frac{|x|}{\sqrt{2}})^{2\alpha-1}}, \quad (0.0.10)$$

pour tout $s_1 < s < c$*, où* $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$*,* $F(x, v) = -\nabla V(x) + \frac{1}{c}B(x)v$ *pour tout* $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *(*$s_1 = s_1(c, n, \beta_1, \beta_2, \alpha, |x|, r)$ *est défini à la fin de la section 2.3).*

On a aussi l'asymptotique aux hautes énergies de b_{sc} et une estimation explicite entre b_{sc} et son asymptotique (Théorème 2.1.1, [Jol05b]).

En utilisant les méthodes de reconstruction d'une fonction à partir de sa transformée de rayons X (voir [Rad17, GGG80, Nat86, Nov99] ou la section A.3 de l'annexe) et en utilisant l'asymptotique trouvée pour a_{sc}, on obtient, en particulier, que le champ extérieur peut être reconstruit à partir de l'asymptotique aux hautes énergies de l'opérateur de diffusion S (Proposition 2.1.1). La possibilité de déterminer le champ extérieur à partir de l'asymptotique aux hautes énergies de b_{sc} est aussi étudiée (Proposition 2.1.2).

Pour $B \equiv 0$, le problème de diffusion inverse pour l'équation de Newton non relativiste pluridimensionnelle a été étudié par Novikov [Nov99] sous les conditions (0.0.3). En développant la méthode de Novikov [Nov99], on a étudié le problème de diffusion inverse pour l'équation de Newton-Einstein pluridimensionnelle d'abord dans le cas $B \equiv 0$ sous les conditions (0.0.3) ([Jol05a]), puis dans le cas général sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4) ([Jol05b]). Dans [Jol07a], on étudie le problème de diffusion inverse pour l'équation de Newton non relativiste pluridimensionnelle dans un champ électromagnétique et sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4). À notre connaissance, le problème de diffusion inverse pour une particule dans un champ électromagnétique avec $B \not\equiv 0$, en mécanique classique ou classique relativiste, n'a pas été considéré dans la littérature avant le travail [Jol05b].

En mécanique quantique le problème de diffusion inverse pour une particule dans un champ électromagnétique $B \not\equiv 0$ a été considéré, en particulier, dans [HN88], [ER95], [Ito95], [Jun97], [ER97], [Nic97], [Ari97], [Hac99], [WY05] (concernant les résultats donnés dans la littérature sur ce problème pour $B \equiv 0$, voir, de plus, [Fad56], [EW95], [Nov05] et les références données dans [Nov05]).

Le Théorème 0.0.2 a été obtenu en développant une méthode de l'article de Novikov [Nov99]. Fixons $v_- \in B_c\backslash\{0\}$, $x_- \in \mathbb{R}^n$. On remarque tout d'abord que si y_- désigne la déflection par rapport au mouvement libre, qui apparait dans (0.0.7), alors, pour y_-, l'équation (0.0.1) prend la forme d'un système équations intégrales

$$(y_-(t), \dot{y}_-(t)) = A_{v_-,x_-}(y_-, \dot{y}_-)(t), \tag{0.0.11}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $0 < r \leq 1$, on étudie l'opérateur A_{v_-,x_-} sur l'espace métrique

$$M_r = \{(f,h) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)^2 \mid \|(f,h)\|_\infty := \max(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - th(t)|, \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|) \leq r\},$$

muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Sous certaines conditions sur v_- et x_- et r, on obtient des estimations et, en particulier, des estimations de contraction sur A_{v_-,x_-} (Lemmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3). Les conditions, que l'on impose à v_- et x_- et r, impliquent l'inégalité $|v_-| > \sqrt{2}r$. Cette dernière inégalité implique que si $(y_-, \dot{y}_-) \in M_r$ alors l'angle $\Theta(t)$ entre v_- et $v_- + \dot{y}_-(t)$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{4}$ ($\Theta(t) \in [0, \pi]$ et $|v_-||v_- + \dot{y}_-(t)| \cos(\Theta(t)) = v_- \circ (v_- + \dot{y}_-(t))$). Ainsi on étudie une diffusion aux petits angles.

A partir des estimations obtenues sur A_{v_-,x_-} et en tenant compte de l'égalité (0.0.11), on étudie la déflection y_- (Théorème 2.3.1). On obtient ainsi et notamment le Théorème 0.0.2.

En ce qui concerne le cas de la mécanique classique non relativiste on a le résultat suivant (voir [Jol07a]) qui donne, en particulier, l'asymptotique aux hautes énergies de la première composante de l'opérateur de diffusion S^{nr} pour l'équation (0.0.6) (ce résultat est l'analogue du Théorème 0.0.2).

Théorème 0.0.3 ([Jol07a])**.** *Sous les conditions* (0.0.3)-(0.0.4)*, on a*

$$\lim_{s\to+\infty} a_{sc}^{nr}(s\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau\theta + x)\theta d\tau, \tag{0.0.12}$$

et

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to+\infty} s \left(a_{sc}^{nr}(s\theta, x) - \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau\theta + x)\theta d\tau \right) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla V(\tau\theta + x) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau\theta + x) \Big(\int_{-\infty}^{s} B(\sigma\theta + x)\theta d\sigma \Big) ds \qquad (0.0.13) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla B_{j,i}(x + \tau\theta) \circ \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\sigma} B(\eta\theta + x)\theta d\eta d\sigma d\tau \right)_{j=1\ldots n}, \end{aligned}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$*,* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$*, où* $\circ$ *désigne le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Et de la même façon que pour (0.0.10), on a une estimation explicite entre a_{sc}^{nr} et son asymptotique aux hautes énergies [Jol07a]. On a aussi obtenu l'asymptotique aux hautes énergies de b_{sc}^{nr} [Jol07a]. Du Théorème 0.0.3, on obtient, en particulier, le résultat suivant.

Théorème 0.0.4 ([Jol07a]). *Sous les conditions* (0.0.3)-(0.0.4)*, l'asymptotique aux hautes énergies de l'opérateur de diffusion* S^{nr} *détermine de manière unique, par des formules explicites,* (V, B).

On obtient le Théorème 0.0.3 en modifiant légèrement la méthode de Novikov [Nov99]. Fixons $v_- \in \mathbb{R}^n$ et $x_- \in \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$. Si y_- désigne la déflection par rapport au mouvement libre, alors $(y_-, \dot{y}_-)$ est un point fixe d'un opérateur $A^{nr}_{v_-,x_-}$. Pour $0 < r \leq 1$ et $R > 0$, on étudie l'opérateur $A^{nr}_{v_-,x_-}$ sur l'espace métrique

$$M^{nr}_{R,r} = \{(f, h) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)^2 \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - th(t)| \leq r, \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| \leq R\},$$

muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie précèdemment.

En imposant les conditions $v_- x_- = 0$ et $|v_-| > \sqrt{2}R$, on obtient des estimations sur $A^{nr}_{v_-,x_-}$ et des estimations et estimations de contraction sur $(A^{nr}_{v_-,x_-})^2$ ([Jol07a]). L'inégalité $|v_-| > \sqrt{2}R$ implique que si $(y_-, \dot{y}_-) \in M_{R,r}$ alors l'angle $\Theta(t)$ entre v_- et $v_- + \dot{y}_-(t)$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{4}$: on étudie une diffusion aux petits angles.

À partir des estimations obtenues sur $(A^{nr}_{v_-,x_-})^2$ et en tenant compte de l'égalité (0.0.11), on étudie la déflection y_- et on obtient ainsi et notamment le Théorème 0.0.4 [Jol07a].

Dans le chapitre 3, on étudie le problème de diffusion inverse à énergie fixée (Problème 2* ci-dessous) et un problème inverse de valeurs au bord (Problème 4 ci-dessous) pour l'équation (0.0.1) .

Commençons par formuler le problème de diffusion inverse à énergie fixée. Sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4) et pour $E > c^2$ on considère l'opérateur S_E défini comme la restriction de l'opérateur de diffusion S à l'ensemble $\{(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S) \mid |v_-| = c\sqrt{\left(\frac{E-V(x_-)}{c^2}\right)^2 - 1}\}$. L'opérateur S_E est appelé opérateur de diffusion à énergie fixée E de l'équation (0.0.1). Le problème de diffusion inverse à énergie fixée (formulé à nouveau dans la section 3.1) est le suivant :

Problème 2* : étant donné S_E à énergie fixée E, trouver V et B.

Formulons maintenant le problème inverse de valeurs au bord qui nous intéresse. On étudie l'équation (0.0.1) dans un domaine D ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, strictement convexe au sens fort, de frontière de classe C^2. Pour l'équation (0.0.1) dans D, on peut démontrer qu'à énergie fixée E suffisamment grande (i.e. $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$), les solutions x d'énergie E ont les propriétés suivantes (section 3.2, section 3.6) :

$$\begin{aligned}
&\text{pour chaque solution } x(t) \text{ il existe } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 < t_2, \text{ tels que} \\
&x \in C^3([t_1, t_2], \mathbb{R}^n), x(t_1), x(t_2) \in \partial D, x(t) \in D \text{ pour } t \in]t_1, t_2[, \\
&x(s_1) \neq x(s_2) \text{ pour } s_1, s_2 \in [t_1, t_2], s_1 \neq s_2;
\end{aligned} \tag{0.0.14}$$

pour tout couple de points distincts $(q_0, q) \in \bar{D}^2$, il existe une et une seule solution $x(t) = x(t, E, q_0, q)$ telle que $x(0) = q_0, x(s) = q$ pour un certain $s > 0$.

(0.0.15)

Soient q_0, q deux points distincts de $\bar{D}$. Par $s_{V,B}(E, q_0, q)$ on désigne le temps en lequel $x(t, E, q_0, q)$ atteint q à partir de q_0. Par $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ on désigne le vecteur vitesse $\dot{x}(0, E, q_0, q)$. Par $k_{V,B}(E, q_0, q)$ on désigne le vecteur vitesse $\dot{x}(s_{V,B}(E, q_0, q), E, q_0, q)$. Les données $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$, $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $q_0, q \in \partial D$, $q_0 \neq q$, sont les données de valeurs au bord.

On peut alors formuler de manière précise un problème direct de valeurs au bord (Problème 3 ci-dessous) et le problème inverse de valeurs au bord correspondant (Problème 4 ci-dessous) pour l'équation (0.0.1) dans D :

Problème 3 : étant donnés V, B, trouver $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ pour tous $q_0, q \in \partial D$, $q_0 \neq q$;

Problème 4 : étant donnés $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ pour tous q_0, $q \in \partial D$, $q_0 \neq q$, à énergie fixée E suffisamment grande, trouver V et B.

Pour le Problème 4, on a le résultat d'unicité suivant.

Théorème 0.0.5 ([Jol07b])**.** *À énergie fixée* $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, *les données de valeurs au bord* $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $(q_0, q) \in \partial D \times \partial D$, $q_0 \neq q$, *déterminent de manière unique* V, B.

À énergie fixée $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, *les données de valeurs au bord* $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$, $(q_0, q) \in \partial D \times \partial D$, $q_0 \neq q$, *déterminent de manière unique* V, B.

Le Théorème 0.0.5 est rappelé dans la section 3.1 (Théorème 3.1.1).

Pour le Problème 2*, on a le résultat d'unicité suivant.

Théorème 0.0.6 ([Jol07b])**.** *Soit* D *un domaine ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *strictement convexe au sens fort, de frontière de classe* C^2. *On suppose* D *donné. Soient* $V \in C_0^2(D, \mathbb{R})$, $B \in C_0^1(D, A_n(\mathbb{R}))$, B *vérifiant* (0.0.2). *Alors à énergie fixée* $E > E(V, B, D)$, *l'opérateur de diffusion à énergie fixée* E, S_E, *détermine de manière unique* (V, B).

Le Théorème 0.0.6 est formulé de manière différente dans la section 3.1 (Théorème 3.1.2). Le Théorème 0.0.6 se déduit du Théorème 0.0.5 en faisant le lien entre les données de diffusion et les données de valeurs au bord lorsque le champ extérieur est à support compact (Proposition 3.2.1) et en imposant des propriétés sur la constante $E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ introduite précèdemment (Propriétés (3.1.7) et (3.2.3)).

La formulation non relativiste des Problèmes 4 et 2* et des Théorèmes 0.0.5 et 0.0.6 est valable (voir [Jol07b]). En adaptant la preuve des Théorèmes 0.0.5 et 0.0.6, on peut obtenir la preuve des Théorèmes 0.0.5 et 0.0.6 dans leur formulation non relativiste (voir [Jol07b]).

Pour $B \equiv 0$ et $n = 3$, Firsov [Fir53] (voir aussi le problème 7 de la section 18 de [LL60]) et Keller-Kay-Shmoys [KKS56] ont étudié le problème de diffusion inverse à énergie fixée pour l'équation de Newton non relativiste pour le cas d'un potentiel radial décroissant en $|x|$. Pour $B \equiv 0$ et $n \geq 2$, la formulation non relativiste du Problème 4 a été étudié dans [GN83]. En utilisant le principe de Maupertuis, [GN83] déduit les résultats d'unicité (analogues au Théorème 0.0.5) et de stabilité pour ce problème de valeurs au bord à partir de résultats sur le problème de la détermination d'une métrique riemannienne isotrope à partir de son hodographe (i.e. à partir de la donnée des longueurs des géodésiques entre tout couple de points frontière) (sur ce problème de géométrie, nous renvoyons à [MR78], [Bey79] et [BG80]). Pour $B \equiv 0$ et $n \geq 2$, Novikov [Nov99] a donné, en particulier, le lien entre le Problème 2* (non relativiste) et le problème inverse de valeurs au bord à énergie fixée de Gerver-Nadirashvili (Problème 4 non relativiste). Pour $B \equiv 0$ et $n \geq 2$, en développant l'approche de [GN83] et de [Nov99], l'auteur [Jol06] a étudié les Problèmes 4 et 2*. Dans [Jol06] des résultats d'unicité et de stabilité sont obtenus. Dans [Jol07b] on a étudié les Problèmes 4 et 2* ainsi que leur formulation non relativiste. Les sections 3.1-3.6 du chapitre 3 sont extraites de [Jol07b].

Concernant des analogues des Théorèmes 0.0.5, 0.0.6 et de la Proposition 3.2.1 pour le cas $B \equiv 0$ dans le cadre de la mécanique quantique nonrelativiste, voir [Nov88], [NSU88], [Nov05] et les références citées dans ces papiers. Concernant un analogue du Théorème 0.0.6 dans le cas $B \equiv 0$ en mécanique quantique relativiste, voir [Iso97]. Concernant des analogues des Théorèmes 0.0.5, 0.0.6 dans le cas $B \not\equiv 0$ en mécanique quantique non relativiste, voir [ER95], [NSU95] et les références citées dans ces papiers.

L'équation (0.0.1) dans D est l'équation d'Euler-Lagrange pour un certain lagrangien auquel on associe l'hamiltonien H, indépendant du temps, donné par

$$H(P,x) = c^2\left(1 + c^{-2}|P - c^{-1}\mathbf{A}(x)|^2\right)^{1/2} + V(x),\ P \in \mathbb{R}^n,\ x \in D, \quad (0.0.16)$$

où $\mathbf{A}$ est un potentiel magnétique C^1 du champ magnétique B sur $\bar{D}$. En appliquant le principe de Maupertuis, les solutions d'énergie E sont des extrema d'une certaine fonctionnelle $\mathcal{A}$.

À énergie E suffisamment grande ($E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$), la fonctionnelle $\mathcal{A}$, prise le long des trajectoires de (0.0.1) d'énergie E, définit l'action réduite $\mathcal{S}_{0V,\mathbf{A},E}$ à énergie fixée E associée à l'hamiltonien H. On étudie la régularité de l'action réduite $\mathcal{S}_{0V,\mathbf{A},E}$ et on exprime sa différentielle en fonction de $\mathbf{A}$ et des données $k_{0,V,B}(E,q_0,q)$, $k_{V,B}(E,q_0,q)$, $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$ (Proposition 3.3.1).

Ensuite (voir sous-section 3.3.4), on considère deux couples de champs extérieurs (V_1, B_1) et (V_2, B_2). À partir des données $k_{V_i,B_i}(E,q_0,q)$, $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$, et des actions réduites $\mathcal{S}_{0V_i,\mathbf{A}_i,E}$, $i = 1, 2$, on construit une $2n-1$ forme différentielle Φ_1 intégrable sur $\partial D \times D$ et une $2n-2$ forme différentielle $\tilde{\Phi}_0$ intégrable sur $\partial D \times \partial D$.

Enfin, des propriétés sur la différentielle des actions réduites $\mathcal{S}_{0V_i,\mathbf{A}_i,E}$, $i=1,2$, on déduit l'égalité

$$\int_{\partial D\times D} \Phi_1 = \int_{\partial D\times\partial D} \tilde{\Phi}_0 \text{ (Lemme 3.3.1).} \tag{0.0.17}$$

Cette égalité et les propriétés de $\tilde{\Phi}_0$ et de Φ_1 permettent d'obtenir le Théorème 0.0.5 (Proposition 3.3.2, Lemme 3.3.1 et Théorème 3.3.1). Quand $B \equiv 0$, l'égalité (0.0.17) et les propriétés de $\tilde{\Phi}_0$ et de Φ_1 donnent aussi la stabilité de V à partir des données de valeurs au bord ([Jol06]).

Quand $B \equiv 0$, alors pour $\mathbf{A} \equiv 0$, l'action réduite $\mathcal{S}_{0V,\mathbf{A},E}$ à énergie fixée $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ est la distance riemannienne pour la métrique riemannienne $r_{V,E}(x)|dx|$ dans $\bar{D}$, où $r_{V,E}(x) = c\sqrt{\left(\frac{E-V(x)}{c^2}\right)^2 - 1}$, $x \in \bar{D}$. Dans ce cas, le Problème 4 devient équivalent au problème suivant de reconstruction, à partir de son hodographe, d'une métrique isotrope (ici $r_{V,E}(x)|dx|$) à la métrique euclidienne $|dx|$ ([Jol06]) :

> **Problème 5 :** étant donnés $\mathcal{S}_{0V,\mathbf{A},E}(q_0,q)$ pour tous $q_0, q \in \partial D, q_0 \neq q$, touver $r_{V,E}$.

Muhometov-Romanov [MR78], Beylkin [Bey79] et Bernstein-Gerver [BG80] ont étudié le problème de la détermination d'une métrique riemannienne isotrope à partir de son hodographe. Quand $B \equiv 0$, et $V_1, V_2 \in C^3$ et $\partial D \in C^\infty$, l'égalité (0.0.17) apparaît dans [Bey79, BG80].

À l'heure actuelle, l'affirmation suivante est une conjecture.

Conjecture. *Sous les conditions* (0.0.3)-(0.0.4)*, à énergie fixée $E > E(V,B)$, l'opérateur de diffusion S_E à énergie fixée E pour l'équation* (0.0.1) *détermine de manière unique (V,B).*

Dans le cas $B \equiv 0$, cette conjecture dans sa formulation non relativiste est la conjecture A énoncée dans [Nov99].

Dans les chapitres 1 et 2, on considérera l'équation (0.0.1) sous les conditions (0.0.3)-(0.0.4) sans (0.0.2) qui n'est pas utile pour établir le Théorème 0.0.1. Cette remarque vaut aussi pour le cas non relativiste et l'analogue non relativiste du Théorème 0.0.1.

Dans l'annexe A, on donne les preuves de résultats non démontrés dans les chapitres 1 et 2, et on rappelle des résultats connus et utilisés dans les chapitres 1 et 2.

Notations

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Tout le long de cette thèse,

- on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille $n \times n$;
- on note $\circ$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$;
- on note $|j|$ la longueur de tout multi-indice $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, i.e. $|j| = \sum_{k=1}^{n} j_k$;
- pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on note $\bar{\Omega}$ la fermeture topologique de Ω ;
- pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{F}_{mag}(\bar{\Omega})$ l'ensemble des champs magnétiques C^1 sur $\bar{\Omega}$, i.e. $\mathcal{F}_{mag}(\bar{\Omega}) = \{B' \in C^1(\bar{\Omega}, A_n(\mathbb{R})) \mid \frac{\partial}{\partial x_i} B'_{k,l}(x) + \frac{\partial}{\partial x_l} B'_{i,k}(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} B'_{l,i}(x) = 0, x \in \bar{\Omega}, i, k, l = 1 \ldots n,\ B' = (B'_{i,k})\}$;
- pour $c \in]0, +\infty[$, on note B_c la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon c, i.e. $B_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < c\}$.

Chapitre 1

Problème de diffusion directe

1.1 Introduction

Considérons l'équation de Newton-Einstein

$$\dot{p}(t) = -\nabla V(x(t)) + \frac{1}{c} B(x(t))\dot{x}(t), \tag{1.1.1}$$
$$p(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}},$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $p(t) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$, $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $B = (B_{i,k}) \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$). Pour l'équation (1.1.1), l'énergie

$$E = c^2 \sqrt{1 + \frac{|p(t)|^2}{c^2}} + V(x(t)) \tag{1.1.2}$$

est une intégrale première du mouvement.

Si $n = 3$ et $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^3)$ alors l'équation (1.1.1) est l'équation de mouvement d'une particule de masse $m = 1$ et de charge $e = 1$ dans un champ électromagnétique statique externe décrit par (V, B) (voir [Ein07] ou section 17 de [LL71]). Dans cette équation x est la position de la particule, p son impulsion, et t désigne le temps et la constante c est la vitesse de la lumière.

On suppose que V et B vérifient les conditions (1.1.3)-(1.1.4) ci-dessous

$$|\partial_x^j V(x)| \leq \beta_{|j|}(1 + |x|)^{-(\alpha+|j|)}, \tag{1.1.3}$$
$$|\partial_x^{j'} B_{i,k}(x)| \leq \beta_{|j'|+1}(1 + |x|)^{-(\alpha+|j'|+1)}, \tag{1.1.4}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|j| \leq 2$, $|j'| \leq 1$ ($j, j' \in \mathbb{N}^n$) où $\alpha > 1$ est une constante réelle et les $\beta_{|j|}$ sont des constantes réelles positives. Le potentiel V et le champ B sont alors dits de courte portée. Sous les conditions (1.1.3), on obtient, en particulier que V est borné sur $\mathbb{R}^n$; ainsi, en utilisant la conservation de l'énergie, on obtient que pour toute solution $x(t)$, $t \in]t_-, t_+[$, de l'équation (1.1.1), il existe une unique solution de l'équation (1.1.1) définie pour tout temps et qui prolonge $x(t)$, $t \in]t_-, t_+[$. Désormais, dans ce chapitre, on ne considérera que les solutions de (1.1.1) définies pour tout temps.

Dans ce chapitre on étudie le problème de diffusion directe pour l'équation de Newton-Einstein (1.1.1) sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4). Le Théorème 1.1.1 suivant est le résultat principal de ce chapitre. Il établit l'existence et donne quelques propriétés de l'opérateur de diffusion pour l'équation (1.1.1).

Théorème 1.1.1. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, on a*

(i) *pour tout* $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$, *il existe une unique solution de l'équation* (1.1.1) *telle que*

$$x(t) = v_- t + x_- + y_-(t), \tag{1.1.5}$$

où $\dot{y}_-(t) \to 0,\ y_-(t) \to 0,$ *quand* $t \to -\infty$ *;*

(ii) *pour presque tout* $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n,\ v_- \neq 0,$

$$x(t) = v_+ t + x_+ + y_+(t), \tag{1.1.6}$$

où $|v_+| = |v_-|$, $\dot{y}_+(t) \to 0$, $y_+(t) \to 0$ *quand* $t \to +\infty$ *;*

(iii) *l'ensemble* $\mathcal{D}(S) = \{(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n \mid v_- \neq 0,$ *la solution* $x(t)$ *de* (1.1.1) *vérifiant* (1.1.5) *vérifie aussi* (1.1.6)$\}$ *est un ouvert de* $B_c \times \mathbb{R}^n$ *et son complémentaire dans* $B_c \times \mathbb{R}^n$ *est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, i.e.* $\mathrm{Mes}((B_c \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathcal{D}(S)) = 0$ *;*

(iv) *l'opérateur* $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{R}(S)$, $(v_-, x_-) \mapsto (v_+, x_+)$ *a les propriétés suivantes : S est de classe C^1 sur $\mathcal{D}(S)$ et S préserve la mesure de Lebesgue.*

La preuve du Théorème 1.1.1 est donnée dans la sous-section 1.6.3.

L'opérateur S défini dans l'item iv du Théorème 1.1.1 est appelé l'opérateur de diffusion pour l'équation (1.1.1).

Le problème de diffusion directe pour l'équation de Newton non relativiste avec $B \equiv 0$ a été étudiée (en dimension $n = 3$) par Simon [Sim71] dans le cas où V est à courte portée (sous des conditions plus faibles que (1.1.3)) et par Herbst [Her74] dans le cas où V est à longue portée. La diffusion directe en mécanique classique non relativiste pour un problème à 2 ou N corps (sans champ B) est traité dans la monographie de Derezinski-Gérard [DG97]. Loss-Thaller [LT87] ont étudié (en dimension $n = 3$) le problème de diffusion directe pour l'équation de Newton non relativiste avec $V \equiv 0$ et $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^3)$ à longue portée. S'appuyant sur le travail de Simon [Sim71], Yajima [Yaj82] a étudié le problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) en dimension $n = 3$ avec V satisfaisant (1.1.3) et $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant des hypothèses un peu plus forte que (1.1.4). Pour l'étude de la diffusion directe en mécanique quantique non relativiste pour le problème à 2 ou N corps (sans champ B), nous renvoyons à la monographie de Derezinski-Gérard [DG97] et aux références contenues dans ce livre. Pour la théorie générale de la diffusion directe en mécanique quantique, nous renvoyons à la monographie de Yafaev [Yaf92].

Le Théorème 1.1.1 peut se démontrer en reprenant sans modification les preuves de certains résultats obtenus dans [Yaj82]. Nous donnons une preuve légèrement différente à celle que l'on obtiendrait en répétant la preuve de certains résultats de [Yaj82] (voir paragraphe 1.3.2).

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 1.2, on rappelle certaines propriétés de l'équation (1.1.1), on introduit des notations, on donne des estimées sur la force F et sur l'accroissement d'une fonction g qui jouera un rôle important dans les deux chapitres suivants. Dans la section 1.3, on démontre en particulier le premier item du Théorème 1.1.1 en transformant l'équation (1.1.1) en une équation intégrale et en étudiant l'opérateur associé à cette équation intégrale ; le premier item du Théorème 1.1.1, une fois prouvé, permet de définir les opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}$ pour l'équation (1.1.1). Dans la section 1.4 on étudie les solutions non bornées de l'équation (1.1.1) d'énergie $E > c^2$; les résultats établis dans cette section permettent de donner une autre description des images des opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}$. Dans la section 1.5, on établit d'autres propriétés des opérateurs d'ondes, notamment la propriété de conservation de la mesure de Lebesgue. Dans la section 1.6, en utilisant notamment la conservation de la mesure (de Lebesgue) par $\Omega^{\pm}$, on montre que les images de $\Omega^{\pm}$, notées $\mathrm{Ran}\Omega^{\pm}$, sont égales modulo un ensemble de mesure nulle, puis on démontre le Théorème 1.1.1. La section 1.7 conclue le chapitre.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Le flot différentiel associé à (1.1.1)

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$, on note $F(x,v)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$F(x,v) = -\nabla V(x) + \frac{1}{c} B(x)v. \tag{1.2.1}$$

L'équation (1.1.1) est une équation différentielle du second ordre. Il est équivalent de considérer le système différentiel autonome suivant

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}} = X(x,p), \text{ où } X(x,p) = \begin{pmatrix} \frac{p}{\sqrt{1+\frac{|p|^2}{c^2}}} \\ F(x, \frac{p}{\sqrt{1+\frac{|p|^2}{c^2}}}) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } x,p \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.2}$$

Le champ de vecteur X a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} X &= (X_1, \ldots, X_{2n}) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), && (1.2.3)\\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_j}(x,p) + \frac{\partial X_{n+j}}{\partial p_j}(x,p) \right), && (1.2.4) \end{aligned}$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ (la définition de X et la régularité de V et B donne (1.2.3) ; pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x) \in A_n(\mathbb{R})$, ce qui implique (1.2.4)).

En utilisant (1.2.3) et la conservation de l'énergie (1.1.2) et en utilisant le fait que V est borné sur $\mathbb{R}^n$ (dû à (1.1.3)), on obtient que par tout point $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ passe une unique solution $\psi(t, x_0, p_0) := (x(t), p(t))$, $t \in \mathbb{R}$, de (1.2.2). L'application ψ est appelé flot associé à (1.1.1) et ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, le flot au temps t, noté ψ^t, est défini par

$$\psi^t(x,p) = \psi(t,x,p), \text{ pour tout } (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ ; \tag{1.2.5}$$

et par théorème de Liouville (on utilise (1.2.4)), on a

$$\psi^t \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ préserve la mesure de Lebesgue.} \tag{1.2.6}$$

De plus on rappelle que le flot ψ a la propriété d'additivité :

$$\psi^t(\psi^s(x,p)) = \psi^{t+s}(x,p), \text{ pour tous } (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.7}$$

1.2.2 Une fonction C^∞ $g : \mathbb{R}^n \to B_c$

La fonction $g : \mathbb{R}^n \to B_c$ définie par

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{c^2}}}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2.8}$$

est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur B_c, et son inverse est la fonction de classe C^∞ $g^{-1} : B_c \to \mathbb{R}^n$ donnée par

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{|x|^2}{c^2}}}, \ x \in B_c. \tag{1.2.9}$$

Dans le Lemme 1.2.1 suivant, on donne quelques propriétés sur la croissance de g.

Lemme 1.2.1. *La fonction g a les propriétés suivantes :*

$$
\begin{aligned}
|\nabla g_i(x)|^2 &\leq \frac{1}{1+\frac{|x|^2}{c^2}}, & (1.2.10)\\
|g(x)-g(y)| &\leq \sqrt{n}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}}|x-y|, & (1.2.11)\\
|\nabla g_i(x)-\nabla g_i(y)| &\leq \frac{3\sqrt{n}}{c}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}|x-y|, & (1.2.12)
\end{aligned}
$$

pour tous $x, y\in\mathbb{R}^n$ et tout $i=1\dots n$, où $g=(g_1,\dots,g_n)$.

La preuve du Lemme 1.2.1 est donnée dans la section A.1 de l'Annexe.

Dans ce chapitre, on utilisera les inégalités suivantes qui se déduisent immédiatement de (1.2.10)-(1.2.12) :

$$
\begin{aligned}
|\nabla g_i(x)|^2 &\leq 1, & (1.2.13)\\
|g(x)-g(y)| &\leq \sqrt{n}|x-y|, & (1.2.14)\\
|\nabla g_i(x)-\nabla g_i(y)| &\leq \frac{3\sqrt{n}}{c}|x-y|, & (1.2.15)
\end{aligned}
$$

pour tous $x, y\in\mathbb{R}^n$ et tout $i=1\dots n$, où $g=(g_1,\dots,g_n)$.

Pour démontrer les principaux résultats de ce chapitre (construction des opérateurs d'ondes, étude des solutions non bornées d'énergie $E<c^2$, et construction de l'opérateur de diffusion), il n'est pas utile d'avoir des estimées aussi précises sur l'accroissement de g. Mais on les utilisera pour donner des estimations explicites.

Les inégalités (1.2.10)-(1.2.12) seront utilisés dans les chapitres 2 et 3.

1.2.3 Estimées sur la force

Dans ce paragraphe on donne des estimées sur la force F définie par (1.2.1).

Lemme 1.2.2. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *on a*

$$
\begin{aligned}
|F(x,v)| &\leq \beta_1 n(1+|x|)^{-(\alpha+1)}(1+\frac{1}{c}|v|), & (1.2.16)\\
\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x,v)\right| &\leq \sqrt{n}\beta_2(1+\frac{|v|}{c})(1+|x|)^{-(\alpha+2)}, & (1.2.17)\\
\left|\frac{\partial F_i}{\partial v_k}(x,v)\right| &\leq \frac{\beta_1}{c}(1+|x|)^{-(\alpha+1)}, & (1.2.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|F(x,v) - F(x',v')| \leq \qquad (1.2.19)\\
&n\beta_1 \frac{1}{c} \sup_{\varepsilon\in[0,1]} (1+|(1-\varepsilon)x+\varepsilon x'|)^{-(\alpha+1)}|v'-v|\\
&+n^{3/2}\beta_2 \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left[(1+|(1-\varepsilon)x+\varepsilon x'|)^{-(\alpha+2)}(1+\frac{1}{c}|(1-\varepsilon)v+\varepsilon v'|)\right]|x'-x|,
\end{aligned}
$$

pour tous $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, *et* $x',v'\in\mathbb{R}^n$ *et tous entiers* $i,k=1\ldots n$, *où* $F=(F_1,\ldots,F_n)$ *est définie par* (1.2.1).

Preuve du Lemme 1.2.2. L'inégalité (1.2.16) se déduit de (1.2.1) et (1.1.3)-(1.1.4). De plus de (1.2.1), on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x,v) &= -\tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}V(x) + \tfrac{1}{c}\textstyle\sum_{l=1}^n \tfrac{\partial B_{i,l}}{\partial x_k}v_l, \qquad (1.2.20)\\
\frac{\partial F_i}{\partial v_k}(x,v) &= \tfrac{1}{c}B_{i,k}(x), \qquad (1.2.21)
\end{aligned}
$$

pour tous $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ et $i,k=1\ldots n$. L'inégalité (1.2.17) se déduit de (1.2.20) et (1.1.3)-(1.1.4). L'inégalité (1.2.18) se déduit de (1.2.21) et (1.1.4). L'inégalité (1.2.19) se déduit de (1.2.17)-(1.2.18). □

1.3 Construction des opérateurs d'ondes

Dans cette section on montre le résultat suivant.

Théorème 1.3.1. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *on a :*

i) pour tout $(x_-,p_-)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $p_-\neq 0$, *l'équation* (1.1.1) *admet une unique solution* z_{x_-,p_-} *telle que*

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} z_{x_-,p_-}(t) - x_- - g(p_-)t &= 0, \qquad (1.3.1)\\
\lim_{t\to-\infty} \dot z_{x_-,p_-}(t) - g(p_-) &= 0\ ; \qquad (1.3.2)
\end{aligned}
$$

ii) l'opérateur $\Omega^+ : \mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ *defini par*

$$
\Omega^+(x,p) = (z_{x,p}(0), g^{-1}(\dot z_{x,p}(0)))\ \textit{pour tout}\ (x,p)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \qquad (1.3.3)
$$

est un C^1 *difféomorphisme sur son image (notée Ran*Ω^+*).*

Remarque 1.3.1 : le premier item du Théorème 1.3.1 est exactement le premier item du Théorème 1.1.1.

Il est encore vrai que sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4), on a :

iii) pour tout $(x_+, p_+) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $p+ \neq 0$, l'équation (1.1.1) admet une unique solution u_{x_+,p_+} telle que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} u_{x_+,p_+}(t) - x_+ - g(p_+)t &= 0, & (1.3.4)\\ \lim_{t\to+\infty} \dot{u}_{x_+,p_+}(t) - g(p_+) &= 0\ ; & (1.3.5) \end{aligned}$$

iv) l'opérateur $\Omega^- : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ defini par

$$\Omega^-(x,p) = (u_{x,p}(0), g^{-1}(\dot{u}_{x,p}(0))) \qquad (1.3.6)$$

est un C^1 difféomorphisme sur son image (notée RanΩ^-).

Les assertions iii) et iv) ci-dessus se démontrent de la même manière que les assertions i) et ii). Les opérateurs Ω^- et Ω^+ définis par (1.3.3) et (1.3.6) sont ce qu'on appelle les opérateurs d'ondes pour l'équation (1.1.1).

Pour démontrer le premier item du Théorème 1.3.1, on transforme l'équation (1.1.1) avec conditions initiales (1.3.1)-(1.3.2) en temps $t = -\infty$ en une équation intégrale (sous-section 1.3.2). On est alors amené à étudier l'opérateur associé à cette équation intégrale (sous-section 1.3.3). Le Théorème 1.3.1 est démontré dans la sous-section 1.3.4.

1.3.1 Notations

Soit $T \in \mathbb{R}$. On considère l'espace métrique complet

$$X_T = \{(f,h) \in C(]-\infty,T],\mathbb{R}^n) \times C(]-\infty,T],\mathbb{R}^n) \mid \|(f,h)\|_{\infty,T} < +\infty\},$$

muni de la norme $\|\ \|_{\infty,T}$ définie par

$$\|(f,h)\|_{\infty,T} = \sup_{t\in]-\infty,T]} |f(t)| + \sup_{t\in]-\infty,T]} |h(t)|, \text{ for } (f,h) \in X_T.$$

On note M_T la boule unité fermée de X_T :

$$M_T = \{(f,h) \in X_T \mid \|(f,h)\|_{\infty,T} \leq 1\}. \qquad (1.3.7)$$

Et on note B_T la boule unité ouverte de X_T :

$$B_T = \{(f,h) \in X_T \mid \|(f,h)\|_{\infty,T} < 1\}. \qquad (1.3.8)$$

On note Σ_0 l'ensemble $\{(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \neq 0\}$.

Dans le Lemme 1.3.1 suivant, on donne quelques estimées relatives à l'ensemble $\Sigma_0 \times X_T$, $T \in \mathbb{R}$. L'estimée (1.3.10) et la continuité de F sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (F est définie par (1.2.1)) montre que l'opérateur A introduit dans la sous-section suivante est bien défini.

Lemme 1.3.1. *Soient* $(p,x) \in \Sigma_0$, $T < +\infty$, $(f,h) \in X_T$. *Alors sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *on a :*

$$\begin{aligned} |x+g(p)s+f(s)| &\geq (|g(p)||s|)/2, && (1.3.9)\\ |F(x+g(p)s+f(s),g(p)+h(s))| &\leq \beta_1 n(2+\frac{1}{c}\|(f,h)\|_{\infty,T}) && (1.3.10)\\ &\quad \times(1+(|g(p)|/2)|s|)^{-(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

pour tout $s \leq \min(-\frac{2(\|(f,h)\|_{\infty,T}+|x|)}{|g(p)|}, T)$.

Preuve du Lemme 1.3.1. On a $|x+g(p)s+f(s)| \geq |g(p)||s| - |f(s)| - |x|$ pour tout $s \leq T$. Ainsi par définition de $\|\|_{\infty,T}$, on obtient l'estimée (1.3.9) pour $s \leq -\frac{2(\|(f,h)\|_{\infty,T}+|x|)}{|g(p)|}$. Par définition de $\|\|_{\infty,T}$ et en utilisant le fait que $|g(p')| \leq c$ pour tout $p' \in \mathbb{R}^n$, on obtient

$$|g(p)+h(s)| \leq c + \|(f,h)\|_{\infty,T}$$

pour tout $s \leq T$. Cette dernière inégalité avec (1.3.9) et (1.2.16) donne (1.3.10). □

1.3.2 Une équation intégrale

Soit $T \in \mathbb{R}$. Sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4), on définit l'opérateur $A : \Sigma_0 \times X_T \to X_T$ par

$$A_{x,p}(f,h) := A(x,p,f,h) = (A^1_{x,p}(f,h), A^2_{x,p}(f,h)) \qquad (1.3.11)$$

où

$$\begin{aligned} A^1_{x,p}(f,h)(t) &= \int_{-\infty}^t A^2_{x,p}(f,h)(s)ds,\\ A^2_{x,p}(f,h)(t) &= g(p+\int_{-\infty}^t F(g(p)s+x+f(s),g(p)+h(s))ds)-g(p), \end{aligned}$$

pour tout $t \leq T$ et tout $(f,h) \in X_T$. (On devrait écrire A_T au lieu de A, mais cela alourdirait les notations.)

Soit $(f,h) \in X_T$. La fonction $A_{x,p}(f,h) \in X_T$ vérifie

$$\begin{aligned} &A_{x,p}(f,h) \in C^2(]-\infty,T],\mathbb{R}^n) \times C^1(]-\infty,T],\mathbb{R}^n),\\ &\dot{A}^1_{x,p}(f,h)(t) = A^2_{x,p}(f,h)(t), \text{ pour tout } t \in]-\infty,T]. \end{aligned}$$

La Proposition 1.3.1 suivante lie les solutions z_{x_-,p_-} de (1.1.1) vérifiant les conditions initiales (1.3.1)-(1.3.2) et les points fixes de A_{x_-,p_-}. La preuve de la Proposition 1.3.1 est immédiate.

Proposition 1.3.1. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, on a*

i) pour tout $(x_-, p_-) \in \Sigma_0$*, si* z_{x_-,p_-} *est une solution de* (1.1.1) *qui vérifie les conditions initiales au temps* $t = -\infty$ (1.3.1)-(1.3.2)*, alors pour tout* $T \in \mathbb{R}$

$$(z_{x_-,p_-}(t) - x_- g(p_-)t, \dot{z}_{x_-,p_-}(t) - g(p_-)),\ t \in]-\infty, T],$$
$$\textit{appartient à } X_T,$$

et

$$(z_{x_-,p_-}(t) - x_- g(p_-)t, \dot{z}_{x_-,p_-}(t) - g(p_-)) = A_{x_-,p_-}(z_{x_-,p_-}, \dot{z}_{x_-,p_-})(t), \tag{1.3.12}$$

pout tout $t \in]-\infty, T]$ *;*

ii) pour tout $T \in \mathbb{R}$ *et tout* $(x_-, p_-) \in \Sigma_0$*, si* $(f, h) \in X_T$ *vérifie* $(f, h) = A_{x_-,p_-}(f, h)$ *alors la fonction* $z_{x_-,p_-}(t) = x_- + g(p_-)t + f(t)$, $t \in]-\infty, T]$*, appartient à* $C^2(]-\infty, T], \mathbb{R}^n)$ *et vérifie les conditions initiales* (1.3.1)-(1.3.2) *et* z_{x_-,p_-} *est une solution de l'équation* (1.1.1)*.*

L'équation intégrale (1.3.12) qui ramène l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de (1.1.1) vérifiant les conditions initiales (1.3.1)-(1.3.2) à l'étude de l'existence et l'unicité des points fixes d'un opérateur (ici A) n'est pas celle utilisée dans [Yaj82]. C'est essentiellement en cela que diffère la preuve du Théorème 1.1.1, que l'on donne dans ce chapitre, à celle que l'on obtiendrait en répétant les preuves de résultats de Yajima [Yaj82].

1.3.3 Propriétés de l'opérateur A

Le Théorème 1.3.2 ci-dessous donne des propriétés de l'opérateur A. Dans ce Théorème, on désigne $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications linéaires continues de l'espace de Banach $\mathcal{E}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{F}$, et on munit $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ définie par

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \sup_{v \in \mathcal{E}, \|v\|_{\mathcal{E}}=1} \|L(v)\|_{\mathcal{F}},$$

pour tout $L \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, où $\|.\|_{\mathcal{E}}$ (resp. $\|.\|_{\mathcal{F}}$) est la norme considérée sur $\mathcal{E}$ (resp. sur $\mathcal{F}$). Si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et $\|.\|_{\mathcal{E}} = \|.\|_{\mathcal{F}}$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}) := \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} := \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$. On rappelle que M_T est défini par (1.3.7) ; sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on considère la norme produit $|.|_\infty$ définie par $|(x, y)|_\infty = \max(|x|, |y|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.2. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, on a :*

i) l'opérateur A *est de classe* C^1 *sur* $\Sigma_0 \times X_T$ *pour tout* $T \in \mathbb{R}$ *;*

ii) l'opérateur A vérifie les inégalités

$$\begin{aligned}
\sup_{(f,h)\in M_T} \|A(x,p,f,h)\|_{\infty,T} &\le C(x,p,T), && (1.3.13)\\
\sup_{(f,h)\in M_T} \|\frac{\partial A}{\partial(f,h)}(x,p,f,h)\|_{\mathcal{L}(X_T)} &\le D_1(x,p,T), && (1.3.14)\\
\sup_{(f,h)\in M_T} \|\frac{\partial A}{\partial(x,p)}(x,p,f,h)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,X_T)} &\le D_2(x,p,T), && (1.3.15)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(x,p,T) &= \frac{2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})(\alpha-1)^{-1}}{\min(\frac{|g(p)|^2}{4},\frac{|g(p)|}{2})(|g(p)||T|/2+1)^{(\alpha-1)}}, && (1.3.16)\\
D_1(x,p,T) &= n^3\frac{16\beta_1(1+\frac{1}{c})+8\beta_2(1+c)}{c(\alpha-1)\min\limits_{k=1\dots 3}(\frac{|g(p)|}{2})^k(1-\frac{|g(p)|}{2}T)^{\alpha-1}}, && (1.3.17)\\
D_2(x,p,T) &= n^{5/2}\frac{(c^{-1}\beta_1+2\sqrt{n}\beta_2)\,(\alpha-1)^{-1}}{\min(\frac{|g(p)|}{2},\frac{|g(p)|^2}{4})(1-\frac{|g(p)|}{2}T)^{\alpha-1}}, && (1.3.18)
\end{aligned}$$

pour tout $(x,p)\in\Sigma_0$ et tout $T\in]-\infty,0]$ tels que $T\le -\frac{2(|x|+1)}{|g(p)|}$, où l'on note par $\frac{\partial A}{\partial(x,p)}(x,p,f,h)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,X_T)$ (resp. par $\frac{\partial A}{\partial(f,h)}(x,p,f,h)\in\mathcal{L}(X_T)$) la différentielle partielle de A au point (x,p,f,h) par rapport à (x,p) (resp. par rapport à (f,h)).

Nous ne donnons pas la preuve du Théorème 1.3.2. La preuve du Théorème 1.3.2 s'obtient par des calculs directs.

Remarque 1.3.2. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, avec $K\subseteq\Sigma_0$, on a

$$\sup_{(x,p)\in K}\max(C(x,p,T),D_1(x,p,T),D_2(x,p,T))\to 0,\ \text{quand } T\to-\infty. \tag{1.3.19}$$

1.3.4 Preuve du Théorème 1.3.1

Soit $(x,p)\in\Sigma_0$. Soit $\delta\in]0,+\infty[$ tel que $\bar{\mathcal{B}}((x,p),\delta):=\{(x',p')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid \max(|x'-x|,|p'-p|)\le\delta\}\subseteq\Sigma_0$. On note $\mathcal{B}((x,p),\delta):=\{(x',p')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid \max(|x'-x|,|p'-p|)<\delta\}$.

De (1.3.19), (1.3.13)-(1.3.15), on déduit qu'il existe $T_{x,p}\in]-\infty,0[$ tel que

$$\|A(x',p',f,h)\|_{T,\infty}\le\frac{1}{2}, \tag{1.3.20}$$

$$\|A(x',p',f',h')-A(x',p',f,h)\|_{T,\infty}\le\frac{1}{2}\|(f-f',h-h')\|_{T,\infty}, \tag{1.3.21}$$

pour tout $T<T_{x,p}$, pour tout $(x',p')\in\mathcal{B}((x,p),\delta)$ et tous (f,h), $(f',h')\in B_T$.

Fixons $T < T_{x,p}$. En utilisant les Lemmes A.2.2 et A.2.3 énoncés dans la sous-section A.2 de l'Annexe A, on obtient que

$$A_{x',p'} : B_T \to X_T \text{ admet un unique point fixe } (y_{x',p'}, w_{x',p'}) \text{ pour tout } (x',p') \in \mathcal{B}((x,p),\delta)\ ; \tag{1.3.22}$$

$$A_{\text{fix}} : \mathcal{B}((x,p),\delta) \to B_T, (x',p') \mapsto (y_{x',p'}, w_{x',p'}), \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathcal{B}((x,p),\delta) \tag{1.3.23}$$

(on rappelle que $A_{x',p'}(f',h') := A(x',p',f',h')$).

La Proposition 1.3.1 et (1.3.22) prouvent le premier item du Théorème 1.3.1.

De plus on a

$$\Omega^+(x',p') = \psi^{-T}(g(p')T + x' + y_{x',p'}(T), g^{-1}(g(p') + w_{x',p'}(T))) \tag{1.3.24}$$

pour tout $(x',p') \in \mathcal{B}((x,p),\delta)$ et $T < T_{x,p}$ où ψ^{-T} est défini par (1.2.5).

De (1.3.23), (1.3.24) et de la régularité de g et ψ, on obtient que

$$\Omega^+ \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathcal{B}((x,p),\delta). \tag{1.3.25}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial\Omega^+}{\partial(x,p)}(x,p) \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \tag{1.3.26}$$

où l'on note par $\frac{\partial\Omega^+}{\partial(x,p)}(x,p)$ la différentielle de Ω^+ au point (x,p). En utilisant le fait que ψ^t est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en utilisant (1.3.24), on obtient que démontrer (1.2.3) est équivalent à démontrer l'existence de $T < T_{x,p}$ tel que

$$\frac{\partial G_T}{\partial(x,p)}(x,p) \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \tag{1.3.27}$$

où $G_T : \mathcal{B}((x,p),\delta) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x',p') \mapsto (g(p')T + x' + y_{x',p'}(T), g(p') + w_{x',p'}(T))$. De (1.3.15), (1.3.21) et du Lemme A.2.3 (voir (A.2.7)) énoncé dans la sous-section A.2 de l'Annexe A, on obtient :

$$\|\frac{\partial(y_{x,p}, w_{x,p})}{\partial(x,p)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, X_T)} \leq 2D_2(x,p,T) \to 0, \text{ quand } T \to -\infty, \tag{1.3.28}$$

où $D_2(x,p,T)$ est défini par (1.3.18). L'estimée (1.3.28) et la définition de G_T prouvent que $\frac{\partial G_T}{\partial(x,p)}(x,p)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ pour $T < T_{x,p}$, $|T|$ suffisamment grand, ce qui implique (1.3.26).

Finalement on a démontré que Ω^+ est de classe C^1 sur Σ_0 et que sa différentielle en tout point de Σ_0 est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, ce qui implique par théorème d'inversion locale que

$$\Omega^+ \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme local en tout point de } \Sigma_0. \tag{1.3.29}$$

Enfin par unicité du problème de Cauchy pour (1.1.1) avec données initiales au temps $t = 0$ et par définition de Ω^+, on obtient que

$$\text{l'opérateur } \Omega^+ \text{ est injectif sur } \Sigma_0. \tag{1.3.30}$$

Le deuxième item du Théorème 1.3.1 se déduit alors de (1.3.29)-(1.3.30).

1.4 Solutions non bornées d'énergie $E > c^2$

Dans cette section, on étudie les solutions de (1.1.1) qui sont non bornées (pour les temps positifs) et d'énergie $E > c^2$. On montre, en particulier, qu'une solution $x(t)$ de (1.1.1) non bornée (pour $t \in [0, +\infty[$) d'énergie $E > c^2$ a, en module, une croissance au moins linéaire en temps (voir Lemme 1.4.1 de la sous-section 1.4.1). Puis, en utilisant ce résultat, on montre que les solutions $x(t)$ de (1.1.1) non bornées (pour $t \in [0, +\infty[$) et d'énergie $E > c^2$ sont exactement les solutions $x(t)$ de (1.1.1) qui peuvent s'écrire sous la forme $x(t) = x_+ + tv_+ + y_+(t)$ où $v_+ \neq 0$, $y_+(t) \to 0$ and $\dot{y}_+(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (voir Lemme 1.4.2 de la sous-section 1.4.2). Le Lemme 1.4.1 est démontré dans la sous-section 1.4.3.

On a des résultats similaires aux résultats des Lemmes 1.4.1 et 1.4.2 pour l'étude des solutions non bornées pour les temps négatifs et d'énergie $E > c^2$.

Les résultats de cette section (et leurs analogues pour $t = -\infty$) seront utilisés dans la section 1.6 (sous-section 1.6.2) pour démontrer en particulier l'égalité entre $\mathrm{Ran}\Omega^+$ et $\mathrm{Ran}\Omega^-$ modulo un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, ce qui permettra de définir l'opérateur de diffusion.

1.4.1 Une borne inférieure

Dans le Lemme 1.4.1 suivant, on montre, en particulier, qu'une solution $x(t)$ de (1.1.1) non bornée (pour $t \in [0, +\infty[$) d'énergie $E > c^2$ a, en module, une croissance au moins linéaire en temps.

Lemme 1.4.1. *Soient $E \in \mathbb{R}$ et $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que*

$$E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p|^2}{c^2}} + V(q). \tag{1.4.1}$$

Sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4), *si $E > c^2$ alors il existe $R_E^q > 0$, $C_E > 0$ tels que s'il existe $T > 0$ tel que $|\psi_1(T, q, p)| > R_E^q$ alors :*

pour tout $t \in [T, +\infty[$, $|\psi_1(t,q,p)| \geq R_E^q$ *; et il existe* T' *et un voisinage ouvert* U *de* (q,p) *tels que*

$$|\psi_1(t,q,p)| \geq C_E|t|, \tag{1.4.2}$$

pour tout $t \geq T'$. *(On rappelle que* ψ_1 *est la première composante du flot* ψ *associé à l'équation* (1.1.1) *et défini dans la sous-section 1.2.1.)*

La preuve du Lemme 1.4.1 est donnée dans la sous-section 1.4.3.

1.4.2 Comportement en temps $t = \infty$

Dans le Lemme 1.4.2 suivant, on montre que les solutions $x(t)$ de (1.1.1) non bornées (pour $t \in [0, +\infty[$) et d'énergie $E > c^2$ sont exactement les solutions $x(t)$ de (1.1.1) qui peuvent s'écrire sous la forme $x(t) = x_+ + tv_+ + y_+(t)$ où $v_+ \neq 0$, $y_+(t) \to 0$ and $\dot{y}_+(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Lemme 1.4.2. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *soient* $(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *et*

$$E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p|^2}{c^2}} + V(q).$$

On suppose que $E > c^2$ *et*

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty}|\psi_1(t,q,p)| = +\infty,$$

où ψ_1 *désigne la première composante du flot* ψ *associé à l'équation* (1.1.1) *et défini dans la sous-section 1.2.1. Alors il existe un unique* $(x_+, p_+) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\psi_1(t,q,p) = x_+ + g(p_+)t + y_+(t),\ t \in \mathbb{R},$$

où $y_+(t) \to 0$, $\dot{y}_+(t) \to 0$ *quand* $t \to +\infty$. *De plus*

$$\begin{aligned} p_+ &= \psi_2(t,q,p) + \int_t^{+\infty} F(\psi_1(t,q,p), g(\psi_2(t,q,p)))d\tau, && (1.4.3)\\ x_+ &= \psi_1(t,q,p) - g(p_+)t && (1.4.4)\\ &\quad + \int_t^{+\infty}\left[g\left(p_+ - \int_\sigma^{+\infty} F(\psi_1(t,q,p), g(\psi_2(t,q,p)))d\tau\right) - g(p_+)\right]d\sigma, \end{aligned}$$

pour $t \in [0, +\infty[$ *(où les intégrales convergent absolument).*

Preuve du Lemme 1.4.2. Comme $E > c^2$ on peut appliquer le Lemme 1.4.2 à $\psi_1(t,q,p)$, $t \in \mathbb{R}$. Ainsi il existe $C_E > 0$, $T' > 0$ tels que

$$|\psi_1(t,q,p)| \geq C_E|t|,\ t \in [T', +\infty[. \tag{1.4.5}$$

En utilisant (1.4.5), (1.2.16) et $|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,q,p)| < c$, on obtient

$$|F(\psi_1(\tau,q,p), \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}(\tau,q,p))| \leq 2n\beta_1(1 + C_E|\tau|)^{-(\alpha+1)}, \tag{1.4.6}$$

pour tout $\tau \in [T', +\infty[$. L'équation (1.1.1) donne

$$\psi_2(s,q,p) = \psi_2(t,q,p) + \int_t^s F(\psi_1(\tau,q,p), g(\psi_2(\tau,q,p)))d\tau, \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned}\psi_1(s,q,p) &= \psi_1(t,q,p) \quad (1.4.8)\\ &+ \int_t^s g\left(\psi_2(t,q,p)) + \int_t^\sigma F(\psi_1(\tau,q,p), g(\psi_2(\tau,q,p)))d\tau\right) d\sigma,\end{aligned}$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R},\ t \leq s$.

Soit $t \in [0, +\infty[$. Soient

$$p_+ = \psi_2(t,q,p) + \int_t^{+\infty} F(\psi_1(\tau,q,p), g(\psi_2(\tau,q,p)))d\tau, \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned}x_+ &= \psi_1(t,q,p) - g(p_+)t \quad (1.4.10)\\ &+ \int_t^{+\infty} \left[g\left(p_+ - \int_\sigma^{+\infty} F(\psi_1(\tau,q,p), g(\psi_2(\tau,q,p)))d\tau\right) - g(p_+)\right] d\sigma\end{aligned}$$

(les vecteurs p_+ et x_+ sont bien définis grâce à (1.4.6), (1.2.14)).

On étudie $z(s) - x_+ - g(p_+)s$. De (1.4.8), (1.4.9), (1.2.14) et (1.4.6), on déduit

$$\begin{aligned}|\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s,q,p) - g(p_+)| &\leq 2n^{3/2}\beta_1 \int_s^{+\infty} (1 + C_E|\tau|)^{-(\alpha+1)} d\tau\\ &\leq \frac{2n^{3/2}\beta_1}{\alpha C_E(1 + C_E s)^\alpha}, \quad (1.4.11)\end{aligned}$$

pour tout $s \geq \max(T', t)$.

Soit $s \geq \max(T', t)$. De (1.4.8) et (1.4.10), on obtient

$$\begin{aligned}&\psi_1(s,q,p) - x_+ - g(p_+)s\\ &= -\int_s^{+\infty} \left[g(p_+ - \int_\sigma^{+\infty} F(\psi_1(\tau,q,p), g(\psi_2(\tau,q,p)))d\tau) - g(p_+)\right] d\sigma,\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (1.2.14) et (1.4.6), on obtient

$$|\psi_1(s,q,p) - x_+ - g(p_+)s| \leq \frac{2n^{3/2}\beta_1}{\alpha(\alpha-1)C_E^2(1 + C_E s)^{\alpha-1}}. \quad (1.4.12)$$

Les estimations (1.4.11) et (1.4.12) prouvent le Lemme 1.4.2. □

1.4.3 Preuve du Lemme 1.4.1

Par continuité de V, il existe un voisinage ouvert U_1 de (q,p) tel que

$$|q' - q| \leq 1, \quad (1.4.13)$$

$$\frac{1}{2}(E - c^2) \leq E_{q',p'} - c^2 \leq \frac{5}{4}(E - c^2), \quad (1.4.14)$$

pour tout $(q',p') \in U_1$, où $E_{q',p'} = c^2\sqrt{1+\frac{|p'|^2}{c^2}} + V(q')$.

Pour $(q',p') \in U_1$, on définit la fonction $I_{q',p'} \in C^2(\mathbb{R},[0,+\infty[)$ par

$$I_{q',p'}(t) = \frac{1}{2}|\psi_1(t,q',p')|^2. \tag{1.4.15}$$

En dérivant deux fois $I_{q',p'}$ et en utilisant l'équation (1.2.2) et la conservation de l'énergie (1.1.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{q',p'}(t) &= g(\psi_2(t,q',p')) \circ \psi_1(t,q',p'), &(1.4.16)\\
\ddot{I}_{q',p'}(t) &= \frac{c^2\left[\left(\frac{E_{q',p'}-V(\psi_1(t,q',p'))}{c^2}\right)^2 - 1\right]}{\left(\frac{E_{q',p'}-V(\psi_1(t,q',p'))}{c^2}\right)^2} &(1.4.17)\\
&\quad -\frac{1}{c^2}\left(\psi_2(t,q',p') \circ \psi_1(t,q',p')\right)\\
&\quad \times\frac{\psi_2(t,q',p') \circ F(\psi_1(t,q',p'), g(\psi_2(t,q',p')))}{(1+\frac{|\psi_2(t,q',p')|^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad +\frac{F(\psi_1(t,q',p'), g(\psi_2(t,q',p'))) \circ \psi_1(t,q',p')}{\sqrt{1+\frac{|\psi_2(t,q',p')|^2}{c^2}}},
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ (où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

Sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4), on a $V(x) \to 0$, et $\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\|y|<c}} |x||F(x,y)| \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. Soit $R_E^q > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
R_E^q &> |q|+1, &(1.4.18)\\
2\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\|y|<c}} |F(x,y)||x| &\le \frac{1}{2}\frac{c^2\left[\left(\frac{E-c^2}{4c^2}+1\right)^2-1\right]}{\left(\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1\right)^2}, \text{ si } |x| \ge R_E^q, &(1.4.19)\\
|V(x)| &\le \frac{E-c^2}{4}, \text{ si } |x| \ge R_E^q. &(1.4.20)
\end{aligned}$$

On suppose désormais qu'il existe $T > 0$ tel que $|\psi_1(T,q,p)| > R_E^q$. Par continuité de ψ^T, il existe un voisinage ouvert U_2 de (q,p), U_2 inclu dans U_1, tel que

$$|\psi_1(T,q',p')| > R_E^q, \quad \text{pour tout } (q',p') \in U_2. \tag{1.4.21}$$

Soit $(q',p') \in U_2$. On va montrer que $|\psi_1(t,q',p')| > R_E^q$ pour tout $t \in [T,+\infty[$. De (1.4.13) et (1.4.18), on a $|q'| = |\psi_1(0,q',p')| \le 1+|q| = 1+|\psi_1(0,q,p)| < R_E^q$. On en déduit (en utilisant aussi (1.4.21)) que

$$t_2^{q',p'} := \sup\{t \in [0,T] \,|\, |\psi_1(t,q',p')| = R_E^q\} \in]0,T[.$$

Soit $c_{q',p'} \in]t_2^{q',p'}, T[$ tel que

$$|\psi_1(T,q',p')| - |\psi_1(t_2^{q',p'},q',p')| = (T - t_2^{q',p'})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_1(t,q',p')|_{|t=c_{q',p'}}. \quad (1.4.22)$$

Compte tenu de la définition de $t_2^{q',p'}$ et de (1.4.21), on remarque que

$$|\psi_1(\sigma,q',p')| > R_E^q \text{ pour tout } \sigma \in]t_2^{q',p'}, T]. \quad (1.4.23)$$

En utilisant (1.4.21), la définition de $t_2^{q',p'}$ et de $I_{q',p'}$, et en utilisant (1.4.22) on obtient aussi

$$\dot{I}_{q',p'}(c_{q',p'}) > 0. \quad (1.4.24)$$

Supposons qu'il existe $t \in]T, +\infty[$ tel que $|\psi_1(t,q',p')| \le R_E^q$. Alors de (1.4.23) on déduit

$$t_3^{q',p'} := \inf\{s \in]c_{q',p'}, +\infty[\,|\, |x_{q',p'}(s)| = R_E^q\} \in]c_{q',p'}, t] \quad (1.4.25)$$

et on a $t_3^{q',p'} \in]t_2^{q',p'}, +\infty[$ (car $c_{q',p'} > t_2^{q',p'}$). De plus on a, par définition de $I_{q',p'}$ et de $t_3^{q',p'}$ (et en utilisant (1.4.23) appliqué à $\sigma = c_{q',p'}$),

$$\dot{I}_{q',p'}(t_3^{q',p'}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\psi_1(t_3^{q',p'},q',p')|^2 - |\psi_1(t_3^{q',p'}-h,q',p')|^2}{2h} \le 0. \quad (1.4.26)$$

On s'intéresse à la croissance de $\dot{I}_{q',p'}$ sur $[c_{q',p'}, t_3^{q',p'}]$. Par définition de $t_2^{q',p'}$, $t_3^{q',p'}$ et de (1.4.23), on a

$$|\psi_1(t,q',p')| \ge R_E^q, \text{ pour } t \in [t_2^{q',p'}, t_3^{q',p'}]. \quad (1.4.27)$$

De (1.4.27), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.20), on déduit

$$\ddot{I}_{q',p'}(t) \ge \frac{1}{2}\frac{c^2\left[\left(\frac{E-c^2}{4c^2}+1\right)^2 - 1\right]}{\left(\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1\right)^2}, \quad (1.4.28)$$

pour tout $t \in [t_2^{q',p'}, t_3^{q',p'}]$. On obtient que $\dot{I}_{q',p'}$ est strictement croissante sur $[c_{q',p'}, t_3^{q',p'}]$, ce qui contredit (1.4.24) et (1.4.26).

Nécessairement

$$|\psi_1(t,q',p')| > R_E^q, \text{ pour tout } t \in [T, +\infty[. \quad (1.4.29)$$

On définit

$$t_1^{q',p'} = \inf\{t \in [0,+\infty[\,|\, |\psi_1(u,q',p')| \ge R_E^q \text{ pour tout } u \in [t,+\infty[\}. \quad (1.4.30)$$

Comme $q' < R_E^q$, on a $t_1^{q',p'} > 0$; et on déduit de la définition de $t_1^{q',p'}$ que

$$\dot{I}_{q',p'}(t_1^{q',p'}) = \lim_{h\to 0_+} \frac{|\psi_1(t_1^{q',p'},q',p')|^2 - |\psi_1(t_1^{q',p'}-h,q',p')|^2}{2h} \geq 0 \tag{1.4.31}$$

En utilisant (1.4.29), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.20) et (1.4.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{q',p'}(t) &\geq \frac{1}{2}\frac{c^2\left[\left(\frac{(E-c^2)}{4c^2}+1\right)^2-1\right]}{\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1} \\
I_{q',p'}(t) &\geq \frac{1}{4}\frac{c^2\left[\left(\frac{E-c^2}{4c^2}+1\right)^2-1\right]}{\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1}(t-t_1^{q',p'})^2 + \dot{I}_{q',p'}(t_1^{q',p'})(t-t_1^{q',p'}) \\
&\quad + I_{q',p'}(t_1^{q',p'}) \\
&\geq \frac{1}{4}\frac{c^2\left[\left(\frac{E-c^2}{4c^2}+1\right)^2-1\right]}{\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1}(t-t_1^{q',p'})^2
\end{aligned} \tag{1.4.32}$$

pour tout $t \in [t_1^{q',p'}, +\infty[$.

Soit

$$C_E := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{c^2\left[\left(\frac{E-c^2}{4c^2}+1\right)^2-1\right]}{\frac{3(E-c^2)}{2c^2}+1}}. \tag{1.4.33}$$

De $t_1^{q',p'} < T$, (1.4.32) et (1.4.33), on déduit

$$|\psi_1(t,q',p')| \geq 2C_E(t-t_1^{q',p'}) \geq 2C_E(t-T) \geq 2(1-T/t)C_E t,$$

pour tout $t \in [T, +\infty[$. □

1.5 Propriétés des opérateurs d'ondes

Dans cette section, on donne quelques propriétés des opérateurs d'ondes $\Omega^\pm$ définis dans la section 1.3. Le résultat principal de cette section est le Théorème 1.5.1 suivant.

Théorème 1.5.1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_{(0)}^t$ le flot au temps t du mouvement libre, i.e.*

$$\psi_{(0)}^t(q,p) = (q+tp,p), \text{ pour tout } (q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Sous les conditions (1.1.3) *et* (1.1.4)*, on a :*

i) les opérateurs d'ondes vérifient

$$\Omega^{\pm}w = \lim_{t\to\mp\infty} \psi^{-t}\psi^t_{(0)}w$$

pour tout $w \in \Sigma_0$ *(les limites sont en fait uniformes sur tout compact de* Σ_0*), où* ψ^{-t} *est le flot au temps* $-t$ *associé à l'équation* (1.1.1) *et défini par* (1.2.5) *;*

ii) les opérateurs $\Omega^{\pm}$ *préserve la mesure de Lebesgue ;*

iii) pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\psi^s\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}\psi^s_{(0)}.$$

Il est encore vrai que les dérivées partielles de $\psi^{-t}\psi^t_{(0)}$ convergent uniformément sur tout compact K de Σ_0 vers les dérivées partielles de $\Omega^{\pm}$ quand $t \to \mp\infty$.

Le deuxième item du Théorème 1.5.1 sert d'argument pour montrer que la mesure de Lebesgue de $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{D}(S)$ est nulle, où $\mathcal{D}(S)$ est l'ensemble de définition de l'opérateur de diffusion S de l'équation (1.1.1) (voir sous-section 1.6.3).

La propriété du premier item correspond à la définition et à la propriété d'isométrie des opérateurs d'ondes de la mécanique quantique pour la diffusion à courte portée (voir [RS79]). La propriété du troisième item correspond aussi à une propriété des opérateurs d'ondes de la mécanique quantique pour la diffusion à courte portée (voir [RS79]).

Dans la sous-section 1.5.1, on introduit quelques notations et des opérateurs A^t. Dans la sous-section 1.5.2, on étudie ces opérateurs (Proposition 1.5.1, Lemme 1.5.2, Proposition 1.5.2) et dans la sous-section 1.5.3, on démontre le Théorème 1.5.1. Dans les sous-sections 1.5.4 et 1.5.5, on démontre la Proposition 1.5.1 et le Lemme 1.5.2 .

1.5.1 Notations

Soit $T < 0$. Pour tout $(x,p) \in \Sigma_0$ et $t \in]-\infty, T]$, on définit l'application $A^t_{x,p} : X_T \to X_T$ par

$$A^t_{x,p}(f,h) = (A^{1,t}_{x,p}(f,h), A^{2,t}_{x,p}(f,h)), \tag{1.5.1}$$

où

$$\begin{aligned} A^{1,t}_{x,p}(f,h)(s) &= Y(s-t)\int_{-\infty}^{s} Y(\tau-t)A^{2,t}_{x,p}(f,h)(\tau)d\tau, \\ A^{2,t}_{x,p}(f,h)(s) &= g(p+\int_{-\infty}^{s} Y(\tau-t)F(g(p)\tau+x+f(\tau), g(p)+h(\tau))d\tau) \\ &\quad -g(p), \end{aligned}$$

pour $(f,h) \in X_T$, et $s \in]-\infty, T]$ (Y désigne la fonction de Heaviside : $Y(t) = 1$ si $t > 0$; $Y(t) = 0$ si $t \le 0$). Ainsi on a

$$A^{1,t}_{x,p}(f,h)(s) = \begin{cases} \int_t^s [g(p + \int_t^\sigma F(g(p)\tau + x + f(\tau), g(p) + h(\tau))d\tau) - g(p)]d\sigma, \\ \text{si } s \in [t,T] \ ; \\ 0, \ \text{si } s \le t \ ; \end{cases} \tag{1.5.2}$$

$$A^{2,t}_{x,p}(f,h)(s) = \begin{cases} g(p + \int_t^s F(g(p)\tau + x + y(\tau), g(p) + z(\tau))d\tau) - g(p), \\ \text{si } s \in [t,T] \ ; \\ 0, \ \text{si } s \le t \ ; \end{cases} \tag{1.5.3}$$

pour $(f,h) \in X_T$.

Remarque 1.5.1. Pour tout $(f,h) \in X_T$, la fonction $A^t_{x,p}(f,h)$ appartient en fait à $C^1(]-\infty,T],\mathbb{R}^n) \times C(]-\infty,T],\mathbb{R}^n)$ et $A^t_{x,p}(f,h)$ vérifie

$$\dot{A}^{1,t}_{x,p}(f,h)(s) = A^{2,t}_{x,p}(f,h)(s),$$

pour tout $s \le T$. De plus un point fixe $(y^t_{x,p}, w^t_{x,p})$ de $A^t_{x,p}$ décrit la déflection par rapport au mouvement libre à partir du temps t et du point de l'espace des phases $(x + g(p)t, p)$, i.e. $z(s) = x + g(p)s + y^t_{p,x}(s)$, $t \le s \le T$, est la solution de l'équation (1.1.1) qui satisfait les conditions initiales au temps t suivantes : $z(t) = x + g(p)t$ et $g^{-1}(\dot{z}(t)) = p$.

Pour tout compact K de Σ_0, on définit deux constantes $a_K \ge 0$, $b_K > 0$ par

$$a_K = \sup_{(x,p)\in K} |x|, \tag{1.5.4}$$

$$b_K = \inf_{(x,p)\in K} |g(p)|. \tag{1.5.5}$$

On utilisera l'estimation suivante.

Lemme 1.5.1. *Soit K un compact de Σ_0, et soit $T \le -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$. Alors on a*

$$|g(p)\tau + x + f| \ge \frac{b_K}{2}|\tau|, \tag{1.5.6}$$

pour tout $(x,p) \in K$, $f \in \mathbb{R}^n$, $|f| \le 1$, $\tau \in]-\infty, T]$.

Dans l'utilisation ultérieur du Lemme 1.5.1, le réel f qui apparaît dans (1.5.6) sera la valeur en τ de la première composante de « $(f,h) \in M_T$ ».

Preuve du Lemme 1.5.1. Soit K un compact de Σ_0, et soient $T \le -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$, $(x,p) \in K$, $\tau \in]-\infty,T]$. De l'inégalité $|y| \le 1$, on obtient

$$|g(p)\tau + x + y| \ge |g(p)||\tau| - |x| - 1, \tag{1.5.7}$$

ce qui donne, par définition de a_K, b_K,

$$|g(p)\tau + x + y| \ge b_K|\tau| - a_K - 1. \tag{1.5.8}$$

De (1.5.8) et $T \le -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$, $\tau \le T$, on déduit (1.5.6). $\square$

1.5.2 Etude des opérateurs A^t

La Proposition 1.5.1 suivante donne des propriétés de contraction sur M_T pour les opérateurs A^t, pour $t \le T$, et pour l'opérateur A défini dans la section 1.3.2 par (1.3.11) dans le cas $T \le 0$, $|T|$ suffisamment grand.

Proposition 1.5.1. *Soit K un compact de Σ_0, et soit $T \le -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$. Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, on a les estimations suivantes :*

$$\sup_{\substack{(x,p)\in K\\(y,w)\in M_T}} \|A^t_{x,p}(y,w)\|_{\infty,T} \le C(K,T), \tag{1.5.9}$$

$$\sup_{\substack{(x,p)\in K\\(y,w)\in M_T}} \|A_{x,p}(y,w)\|_{\infty,T} \le C(K,T), \tag{1.5.10}$$

pour tout $t \le T$, où

$$C(K,T) = \frac{2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})}{(\alpha-1)\min(\frac{b_K^2}{4},\frac{b_K}{2})(b_K|T|/2+1)^{(\alpha-1)}}. \tag{1.5.11}$$

De plus,

$$\sup_{(x,p)\in K} \|A^t_{x,p}(y,w) - A^t_{x,p}(y',w')\|_{\infty,T} \le D(K,T)\|(y-y',w-w')\|_{\infty,T}, \tag{1.5.12}$$

pour tous $t \le T$, (y,w), $(y',w') \in M_T$;

$$\sup_{(x,p)\in K} \|A_{x,p}(y,w) - A_{x,p}(y',w')\|_{\infty,T} \le D(K,T)\|(y-y',w-w')\|_{\infty,T}, \tag{1.5.13}$$

pour tous $t \le T$, (y,w), $(y',w') \in M_T$, où

$$D(K,T) = \frac{4n^2\tilde\beta(1+\frac{1}{c})}{(\alpha-1)\min(\frac{b_K}{2},\frac{b_K^2}{4})(1-\frac{b_K}{2}T)^{\alpha-1}}, \tag{1.5.14}$$

où $\tilde\beta = \max(\beta_1,\beta_2)$.

La Proposition 1.5.1 est démontrée dans la sous-section 1.5.4.

En utilisant la Proposition 1.5.1 et le fait que

$$\begin{aligned}\lim_{T\to-\infty} C(K,T) &= 0,\\ \lim_{T\to-\infty} D(K,T) &= 0,\end{aligned}$$

pour tout compact K de Σ_0, on obtient :

Corollaire 1.5.1. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, pour tout compact K de Σ_0, il existe $T_K \le -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$ tel que les applications $A^t_{x,p}$ et $A_{x,p}$ sont des applications $\frac{1}{2}$-contractantes de M_T pour tout $(x,p)\in K$ et tout $t \le T_K$.*

Soit $T < 0$. Pour tous $(x,p) \in \Sigma_0$, $t \leq T$, un point fixe $(y^t_{p,x}, w^t_{p,x})$ de $A^t_{x,p}$ décrit la déflection par rapport au mouvement libre à partir du temps t et du point de l'espace des phases $(x+g(p)t, p)$, i.e. $z(s) = x + g(p)s + y^t_{p,x}(s)$, $t \leq s \leq T$, est la solution de l'équation (1.1.1) qui satisfait $z(t) = x + g(p)t$ et $g^{-1}(\dot{z}(t)) = p$.

Nous allons démontrer que pour tout compact K de Σ_0 et pour tout $T < 0$, $|T|$ suffisamment grand, le point fixe de $A^t_{x,p}$ converge vers le point fixe de $A_{x,p}$ quand $t \to -\infty$ et que cette convergence est uniforme sur K et en t. Nous aurons besoin du Lemme 1.5.2 suivant.

Lemme 1.5.2. *Soient K un compact de Σ_0, $T \leq -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$ et $t \leq T$. Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *on a*

$$\sup_{\substack{(x,p)\in K \\ (u,v)\in M_T}} \|A^t_{x,p}(u,v) - A_{x,p}(u,v)\|_{\infty,T} \leq 2C(K,t), \tag{1.5.15}$$

où $C(K,t)$ est défini par (1.5.11).

Le Lemme 1.5.2 est démontré dans la sous-section 1.5.5.

Soit K un compact de Σ_0 et soit $T < 0$ choisi comme dans le Corollaire 1.5.1. Pour tout $(x,p) \in K$ et tout $t \leq T$, on note $(y_{x,p}, w_{x,p})$ le point fixe de $A_{x,p}$ dans M_T et on note $(y^t_{x,p}, w^t_{x,p})$ le point fixe de $A^t_{g(p),x}$ dans M_T.

Proposition 1.5.2. *Soit K un compact de Σ_0. Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4), *si $T \leq -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$ est choisi comme dans le Corollaire 1.5.1 alors on a*

$$\sup_{(x,p)\in K} \|(y^t_{x,p} - y_{x,p}, w^t_{x,p} - w_{x,p})\|_{\infty,T} \leq 4C(K,t), \tag{1.5.16}$$

pour tous $t \in]-\infty, T]$, où $C(K,t)$ est défini par (1.5.11).

Preuve de la Proposition 1.5.2. Soient $t \in]-\infty, T]$, $(x,p) \in K$. Par définition de $(y^t_{p,x}, z^t_{p,x})$ et $(y_{p,x}, z_{p,x})$, il vient

$$\begin{aligned} &\|(y^t_{x,p} - y_{x,p}, w^t_{x,p} - w_{x,p})\|_{\infty,T} = \|A^t_{x,p}(y^t_{x,p}, w^t_{x,p}) - A_{x,p}(y_{x,p}, w_{x,p})\|_{\infty,T} \\ &\leq \|A^t_{x,p}(y^t_{x,p}, z^t_{x,p}) - A^t_{x,p}(y_{x,p}, w_{x,p})\|_{\infty,T} \\ &+\|A^t_{x,p}(y_{x,p}, z_{x,p}) - A_{x,p}(y_{x,p}, z_{x,p})\|_{\infty,T}. \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

En utilisant (1.5.17), (1.5.15) (appliqué à « (u,v) »$= (y_{p,x}, z_{p,x})$) et en utilisant le fait que $A^t_{x,p}$ est une application $\frac{1}{2}$-contractante (Corollaire 1.5.1), on obtient

$$\|(y^t_{p,x} - y_{p,x}, z^t_{p,x} - z_{p,x})\|_{\infty,T} \leq \frac{1}{2}\|(y^t_{p,x} - y_{p,x}, z^t_{p,x} - z_{p,x})\|_{\infty,T} + 2C(K,t),$$

ce qui démontre (1.5.16). □

1.5.3 Preuve du Théorème 1.5.1

On conserve les notations utilisées dans la Proposition 1.5.2. Soit K un compact de Σ_0, et soit $T \leq -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$ choisi comme dans le Corollaire 1.5.1. Par la Proposition 1.5.2 (et en utilisant la remarque 1.5.1 de la sous-section 1.5.1), nous obtenons

$$\sup_{(x,p)\in K} |y^t_{x,p}(T-1) - y_{x,p}(T-1)| \leq 4C(K,t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.5.18}$$

$$\sup_{(x,p)\in K} |\dot{y}^t_{x,p}(T-1) - \dot{y}_{x,p}(T-1)| \leq 4C(K,t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.5.19}$$

De plus, pour tout $(x,p) \in \Sigma_0$

$$\begin{aligned}
\Omega^+(x,p) &= (x + y_{x,p}(0), g^{-1}(g(p) + \dot{y}_{x,p}(0))) \\
&= \psi^{-T+1}\psi^{T-1}(x + y_{x,p}(0), g^{-1}(g(p) + \dot{y}_{x,p}(0))) \\
&= \psi^{-T+1}(x + g(p)(T-1) + y_{x,p}(T-1), \\
&\quad g^{-1}(g(p) + \dot{y}_{x,p}(T-1))).
\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

Ainsi en utilisant (1.5.18)-(1.5.20) et la continuité des fonctions ψ^{-T+1}, g^{-1} et g, on déduit que

$$\psi^{-T+1}(x + g(p)(T-1) + y^t_{x,p}(T-1), g^{-1}(g(p) + \dot{y}^t_{x,p}(T-1))) \tag{1.5.21}$$

converge vers $\Omega^+(x,p)$ ($(x,p) \in K$) uniformément sur K, quand $t \to -\infty$.

De plus pour tout $t \leq T-1$ et tout $(x,p) \in K$

$$\begin{aligned}
&(x + g(p)(T-1) + y^t_{x,p}(T-1), g^{-1}(g(p) + \dot{y}^t_{x,p}(T-1))) \\
&= \psi^{-t+T-1}(x + g(p)t + y^t_{x,p}(t), g(p) + \dot{y}^t_{x,p}(t)) \\
&= \psi^{-t+T-1}(x + g(p)t, g(p)) \\
&= \psi^{-t+T-1}\psi^t_{(0)}(x,p)
\end{aligned} \tag{1.5.22}$$

En utilisant (1.5.21), (1.5.22) et l'additivité du flot ψ^t ($\psi^{t+s} = \psi^s\psi^t$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$), on obtient (i). Le (ii) vient de (i) et du théorème de Liouville. Le (iii) vient de (i) et de la continuité de ψ^s et de l'additivité des flots $\psi^t_{(0)}$, ψ^t. $\square$

1.5.4 Preuve de la Proposition 1.5.1

Soit K un compact de Σ_0, et soient $T \leq -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$, $(x,p) \in K$, $(y,w) \in M_T$, $s \in [t,T]$. De (1.5.3), (1.2.14) et (1.2.16), on déduit

$$\begin{aligned}
|A^{2,t}_{x,p}(y,w)(s)| &\leq 2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})\int_t^s (1+\frac{b_K}{2}|\tau|)^{-(\alpha+1)}d\tau \qquad (1.5.23) \\
&\leq 2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})\int_{-\infty}^T (1+\frac{b_K}{2}|\tau|)^{-(\alpha+1)}d\tau. \qquad (1.5.24)
\end{aligned}$$

De (1.5.2) et (1.5.23), on obtient

$$\begin{aligned} |A^{1,t}_{x,p}(y,w)(s)| &\leq \int_t^s |A^{2,t}_{x,p}(y(\tau),w(\tau))|d\tau, && (1.5.25)\\ &\leq 2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})\int_{-\infty}^{T}\int_{-\infty}^{\sigma}(1+\frac{b_K}{2}|\tau|)^{-(\alpha+1)}d\tau d\sigma. && (1.5.26)\end{aligned}$$

Les estimations (1.5.24) et (1.5.26) impliquent (1.5.9) ; l'estimation (1.5.10) s'obtient de la même manière en remplaçant t par $-\infty$ dans (1.5.23) et (1.5.25).

Soient (y,w), $(y',w')\in M_T$. En utilisant (1.5.3), (1.2.14), (1.2.19), et en utilisant la convexité de M_T (si $(f,h)\in M_T$ et $(f',h')\in M_T$ et $\varepsilon\in[0,1]$, alors $((1-\varepsilon)f+\varepsilon f',(1-\varepsilon)h+\varepsilon h')\in M_T$) et en utilisant (1.5.6), on obtient

$$\begin{aligned} &|A^{2,t}_{x,p}(y,w)(s)-A^{2,t}_{x,p}(y',w')(s)| = \Big| g(p+\int_t^s F(g(p)\tau+x+y(\tau),\\ &g(p)+w(\tau))d\tau) - g(p+\int_t^s F(g(p)\tau+x+y'(\tau),g(p)+w'(\tau))d\tau)\Big|\\ &\leq 2n^2\beta_2(1+\frac{1}{c})\int_t^s(1-\frac{b_K}{2}\tau)^{-(\alpha+2)}|y(\tau)-y'(\tau)|d\tau\\ &+\frac{1}{c}n^{3/2}\beta_1\int_t^s(1-\frac{b_K}{2}\tau)^{-(\alpha+1)}|w(\tau)-w'(\tau)|d\tau\\ &\leq [2n^2\beta_2(1+\frac{1}{c})\int_{-\infty}^s(1-\frac{b_K}{2}\tau)^{-(\alpha+2)}d\tau\\ &+\frac{1}{c}n^{3/2}\beta_1\int_{-\infty}^s(1-\frac{b_K}{2}\tau)^{-(\alpha+1)}d\tau]\|(y-y',w-w')\|_{\infty,T}\\ &\leq \frac{4n^2\tilde\beta(1+\frac{1}{c})}{\alpha\frac{b_K}{2}(1+\frac{b_K}{2}|s|)^{\alpha}}\|(y-y',w-w')\|_{\infty,T}, \qquad (1.5.27)\end{aligned}$$

pour tout $s\in[t,T]$, où $\tilde\beta=\max(\beta_1,\beta_2)$. De (1.5.2) et (1.5.27), il vient aussi

$$\begin{aligned} &|A^{1,t}_{x,p}(y,w)(s)-A^{1,t}_{x,p}(y',w')(s)| \leq \int_t^s |A^{2,t}_{x,p}(y,w)(\tau)-A^{2,t}_{x,p}(y',w')(\tau)|d\tau,\\ &\leq \frac{4n^2\tilde\beta(1+\frac{1}{c})}{\alpha(\alpha-1)\frac{b_K^2}{4}(1+\frac{b_K}{2}|s|)^{\alpha-1}}\|(y-y',w-w')\|_{\infty,T} \qquad (1.5.28)\end{aligned}$$

pour tout $s\in[t,T]$. Les estimations (1.5.27) et (1.5.28) donnent (1.5.12). De la même manière, on obtient (1.5.13) en remplaçant t par $-\infty$ dans (1.5.27) et (1.5.28). $\square$

1.5.5 Preuve du Lemme 1.5.2

Soient K un compact de Σ_0 et $T \leq -\frac{2(a_K+1)}{b_K}$. Soient $(x,p) \in K$, $t \leq T$ et $(u,v) \in M_T$. De (1.5.3), (1.3.11), on a

$$\begin{aligned} &|A^{2,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^2_{x,p}(u,v)(s)| \leq \\ &\Big| g(p + \int_t^s F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))d\tau) \\ &- g(p + \int_{-\infty}^s F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))d\tau)\Big|, \end{aligned} \tag{1.5.29}$$

pour tout $s \in [t,T]$. En utilisant (1.5.29), (1.2.14), (1.2.16) et (1.5.6), on obtient

$$\begin{aligned} |A^{2,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^2_{x,p}(u,v)(s)| &\leq \sqrt{n}|\int_{-\infty}^t F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))d\tau| \\ &\leq 2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})\int_{-\infty}^t (1 + \frac{b_K}{2}|s|)^{-\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})}{\alpha\frac{b_K}{2}(1+\frac{b_K}{2}|t|)^\alpha}. \end{aligned} \tag{1.5.30}$$

pour tout $s \in [t,T]$.

De plus, de (1.5.2), (1.3.11), on a

$$\begin{aligned} &|A^{1,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^1_{x,p}(u,v)(s)| \\ &\leq \Big|\int_t^s \Big[g(p + \int_t^\sigma F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))d\tau) \\ &- g(p + \int_{-\infty}^\sigma F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))d\tau)\Big] d\sigma\Big| \\ &+|A^1_{x,p}(u,v)(t)|, \end{aligned} \tag{1.5.31}$$

pour tout $s \in [t,T]$. On utilise (1.5.10) pour estimer le second terme à droite de l'inégalité (1.5.31). On utilise (1.2.14) et (1.2.16) pour estimer le premier terme à droite de l'inégalité (1.5.31). On obtient

$$\begin{aligned} &|A^{1,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^1_{x,p}(u,v)(s)| \\ &\leq \sqrt{n}|t-s|\int_{-\infty}^t |F(g(p)\tau + x + u(\tau), g(p) + v(\tau))|d\tau + C(K,t) \\ &\leq 2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})|t-s|\int_{-\infty}^t (1+\frac{b_K}{2}|\tau|)^{-(\alpha+1)}d\tau + C(K,t) \\ &\leq \frac{2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})|t-s|}{\alpha\frac{b_K}{2}(1+\frac{b_K}{2}|t|)^\alpha} + C(K,t), \end{aligned} \tag{1.5.32}$$

pour tout $s \in [t,T]$. Ensuite de (1.5.32) et de l'inégalité $|s-t| \leq |t|$ pour tout $s \in [t,T]$, on déduit

$$|A^{1,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^1_{x,p}(u,v)(s)| \leq \frac{2n^{3/2}\beta_1(1+\frac{1}{c})}{\alpha\frac{b_K^2}{4}(1+\frac{b_K}{2}|t|)^{\alpha-1}} + C(K,t), \qquad (1.5.33)$$

pour tout $s \in [t,T]$.

De (1.5.10), (1.5.3) et (1.5.2), on a

$$\begin{aligned} |A^{2,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^2_{x,p}(u,v)(s)| &= |A^2_{x,p}(u,v)(s)| \leq C(K,t), &(1.5.34)\\ |A^{1,t}_{x,p}(u,v)(s) - A^1_{x,p}(u,v)(s)| &= |A^1_{x,p}(u,v)(s)| \leq C(K,t), &(1.5.35)\end{aligned}$$

pour tout $s \leq t$.

Les formules (1.5.11), (1.5.30), (1.5.33), (1.5.34) et (1.5.35) donnent (1.5.15).

□

1.6 L'opérateur de diffusion

Dans cette section on rappelle tout d'abord un résultat sur les systèmes dynamiques que l'on énonce dans notre cadre (sous-section 1.6.1). Puis en utilisant ce résultat, on démontre la complétude asymptotique, i.e. l'égalité entre les images des opérateurs d'ondes modulo un ensemble de mesure nulle (sous-section 1.6.2). Enfin on démontre le Théorème 1.1.1 (sous-section 1.6.3).

1.6.1 Rappel

Considérons $\mathcal{B}$ l'ensemble des points (q,p) de l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en lesquels passe une trajectoire bornée de (1.1.1), et considérons $\mathcal{B}^{\pm}$ l'ensemble des points (q,p) de l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en lesquels passe une trajectoire de (1.1.1) bornée uniquement au voisinage de $t = \pm\infty$, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi^t(q,p)| < +\infty\}, &(1.6.1)\\ \mathcal{B}^+ &= \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \sup_{t\in[0,+\infty[} |\psi^t(q,p)| < +\infty\}, &(1.6.2)\\ \mathcal{B}^- &= \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \sup_{t\in]-\infty,0]} |\psi^t(q,p)| < +\infty\}, &(1.6.3)\end{aligned}$$

où ψ^t est le flot au temps t de l'équation (1.1.1) défini par (1.2.5).

L'ensemble $\mathcal{B}$ est inclu dans l'ensemble $\mathcal{B}^{\pm}$. Les notations $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{\pm}$ sont empruntées à [DG97].

Comme le flot ψ^t au temps t de l'équation (1.1.1) conserve la mesure de Lebesgue, on a le résultat suivant.

Théorème 1.6.1. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, l'ensemble* $\mathcal{B}^{\pm}\backslash\mathcal{B}$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Preuve du Théorème 1.6.1. On note μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On va montrer que $\mu(\mathcal{B}^+\backslash\mathcal{B}) = 0$ (de la même manière on montrerait que $\mu(\mathcal{B}^-\backslash\mathcal{B}) = 0$). Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{B}_m^+ := \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \sup_{t\in[0,+\infty[} |\psi^t(q,p)| \leq m\},$$
$$\mathcal{B}_m := \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi^t(q,p)| \leq m\}.$$

Comme $\psi^0(q,p) = (q,p)$ pour $(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les ensembles $\mathcal{B}_m^+$ et $\mathcal{B}_m$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus on a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \cup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_m &= \mathcal{B} \ ; && (1.6.4)\\ \cup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_m^+ &= \mathcal{B}^+ \ ; && (1.6.5)\\ \psi^k(\mathcal{B}_m^+) &\subseteq \mathcal{B}_m^+, \text{ pour tous } k,m \in \mathbb{N} \ ; && (1.6.6)\\ \cap_{k\in\mathbb{N}}\psi^k(\mathcal{B}_m^+) &\subseteq \mathcal{B}_m, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} && (1.6.7) \end{aligned}$$

(les propriétés (1.6.4)-(1.6.5) proviennent des définitions (1.6.1)-(1.6.2) ; les propriétés (1.6.6) et (1.6.7) se déduisent de la définition de $\mathcal{B}_m^+$ et $\mathcal{B}_m$ et de la propriété d'additivité (1.2.7) du flot ψ).

De (1.6.4) et (1.6.5), on a $\mathcal{B}^+\backslash\mathcal{B} \subseteq \cup_{m\in\mathbb{N}}\left(\mathcal{B}_m^+\backslash\mathcal{B}_m\right)$. Montrons que pour tout $m \in \mathbb{N}$ $\mu(\mathcal{B}_m^+\backslash\mathcal{B}_m) = 0$, ce qui impliquera $\mu(\mathcal{B}^+\backslash\mathcal{B}) = 0$ par l'inclusion précédente.

Soit $m \in \mathbb{N}$. De (1.6.7) on a

$$\mathcal{B}_m^+\backslash\mathcal{B}_m \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}}\left(\mathcal{B}_m^+\backslash\psi^k(\mathcal{B}_m^+)\right), \tag{1.6.8}$$

Comme le flot ψ^t au temps t conserve la mesure de Lebesgue, on a

$$\mu(\psi^k(\mathcal{B}_m^+)) = \mu(\mathcal{B}_m^+), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{1.6.9}$$

La mesure de $\mathcal{B}_m^+$ étant finie (car $\mathcal{B}_m^+$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), (1.6.9) et (1.6.6) donnent

$$\mu(\mathcal{B}_m^+\backslash\psi^k(\mathcal{B}_m^+)) = 0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{1.6.10}$$

De (1.6.8) et (1.6.10), on déduit $\mu(\mathcal{B}_m^+\backslash\mathcal{B}_m) = 0$. □

1.6.2 Complétude asymptotique

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On dit que A et B sont égaux modulo un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue si $A\backslash B$ et $B\backslash A$ sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. On a le résultat suivant.

Théorème 1.6.2. *Sous les conditions* (1.1.3)-(1.1.4)*, les ensembles* $\mathrm{Ran}\Omega^+$, $\mathrm{Ran}\Omega^-$ *et* $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{B}$ *sont égaux modulo un ensemble de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*), où* $\Omega^\pm$ *sont les opérateurs d'ondes associés à l'équation* (1.1.1) *et définis par* (1.3.3) *et* (1.3.6)*.*

L'égalité des images des opérateurs d'ondes modulo un ensemble de mesure nulle est ce qu'on appelle la complétude asymptotique par analogie avec la théorie de la diffusion en mécanique quantique (voir [RS79]).

Preuve du Théorème 1.6.2. Ici, on ne démontrera que l'égalité entre $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{B}$ et $\mathrm{Ran}\Omega^+$ modulo un ensemble de mesure nulle. L'égalité entre $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{B}$ et $\mathrm{Ran}\Omega^-$ (modulo un ensemble de mesure nulle) se démontrerait de la même manière.

Par conservation de l'energie (1.1.2) et par définition de $\mathcal{B}^-$, on obtient l'égalité suivante

$$\{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \overline{\lim}_{t\to-\infty}|\psi_1(t,q,p)| < +\infty\} = \mathcal{B}^- \tag{1.6.11}$$

(on rappelle que V est bornée sur $\mathbb{R}^n$).

Soit $\mathcal{M}_{E=0}$ la sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2n-1$ définie par

$$\mathcal{M}_{E=0} = \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid c^2\sqrt{1+\frac{|p|^2}{c^2}} + V(q) = 0\}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{E=0}$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Par le Lemme 1.4.2 (ou plutôt son analogue en $t = -\infty$), on a

$$\mathrm{Ran}\Omega^+ = \{(q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \overline{\lim}_{t\to-\infty}|\psi_1(t,q,p)| = +\infty\}\backslash\mathcal{M}_{E=0}. \tag{1.6.12}$$

De (1.6.11)-(1.6.12) et de l'inclusion $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^-$, on obtient

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathrm{Ran}\Omega^+ = \mathcal{B} \cup \left(\mathcal{B}^-\backslash\mathcal{B}\right) \cup \mathcal{M}_{E=0}$$

De cette dernière égalité et du Théorème 1.6.1, on déduit que les ensembles $((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{B}) \cap ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathrm{Ran}\Omega^+)$ et $\mathrm{Ran}\Omega^+ \cap \mathcal{B}$ sont de mesure de Lebesgue nulle. □

1.6.3 Preuve du Théorème 1.1.1

Le (i) du Théorème 1.1.1 est exactement le (i) du Théorème 1.3.1 que l'on a démontré dans la sous-section 1.3.4.

On considère la fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to B_c \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(q,p) = (g(p), q), \text{ pour tout } (q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{1.6.13}$$

La fonction Φ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur $B_c \times \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{D}(S)$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{D}(S) = \Phi((\Omega^+)^{-1}\left(\mathrm{Ran}\Omega^+ \cap \mathrm{Ran}\Omega^-\right)).$$

Du (ii) du Théorème 1.3.1, on déduit que $\mathrm{Ran}\Omega^\pm$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\mathcal{D}(S) \text{ est aussi un ouvert de } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{1.6.14}$$

De plus, du (ii) du Théorème 1.5.1 et du Théorème 1.6.2 (et en utilisant aussi que Φ est un difféomorphisme), on déduit que

$$\begin{aligned}&\text{le complémentaire de } \mathcal{D}(S) \text{ dans } B_c \times \mathbb{R}^n \text{ est de mesure} \\ &\text{nulle pour la mesure de Lebesgue de } B_c \times \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{1.6.15}$$

Par définition de $\mathcal{D}(S)$ et de $\Omega^\pm$ et par (1.6.15), on obtient le (ii) du Théorème 1.1.1. Par définition de $\mathcal{D}(S)$ et de $\Omega^\pm$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(S) = \{(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n \mid v_- \neq 0, \ &\textit{la solution } x(t) \textit{de } (1.1.1) \\ &\textit{vérifiant } (1.1.5) \textit{ vérifie aussi } (1.1.6)\},\end{aligned}$$

et de (1.6.14)-(1.6.15), on obtient le (iii) du Théorème 1.1.1.

On considère l'application $S : B_c \times \mathbb{R}^n \to B_c \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$Sw = \Phi((\Omega^-)^{-1}\Omega^+(\Phi^{-1}(w))), \text{ pour tout } w \in \mathcal{D}(S).$$

La régularité de Φ et le (ii) du Théorème 1.3.1 prouve que S est de classe C^1 sur $\mathcal{D}(S)$. Par définition de $\Omega^\pm$ et de Φ, S est l'opérateur de diffusion tel qu'il est défini au (iv) du Théorème 1.1.1. Il reste à démontrer que S préserve la mesure de Lebesgue.

Soit $\tilde{S} : \Phi^{-1}(\mathcal{D}(S)) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{S}w = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+(w), \text{ pour tout } w \in \Phi^{-1}(\mathcal{D}(S)).$$

Par le (ii) du Théorème 1.3.1 et le (ii) du Théorème 1.5.1, on obtient que

$$\tilde{S} \text{ préserve la mesure de Lebesgue.} \tag{1.6.16}$$

On note $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$. Soit $(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Désignons par $J_\Phi(x,p)$ le déterminant jacobien de Φ en $(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note O_n la matrice nulle carrée de taille $n \times n$ et I_n la matrice identité carrée de taille $n \times n$. De (1.6.13), on a

$$J_\Phi(x,p) = \begin{pmatrix} 0_n & \gamma(x,p) \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}\gamma(x,p) &= \frac{1}{(1+\frac{|p|^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\left((1+|p|^2/c^2)I_n - \delta(x,p)\right), \\ \delta(x,p) &= \frac{1}{c^2}\left(p_1 p \ldots p_n p\right).\end{aligned}$$

Comme le rang de $\delta(p,x)$ est au plus 1, on obtient

$$\begin{aligned}\det J_\Phi(x,p) &= (1+\frac{|p|^2}{c^2})^{-\frac{3n}{2}}\left[(1+\frac{|p|^2}{c^2})^n - \frac{|p|^2}{c^2}(1+\frac{|p|^2}{c^2})^{n-1}\right]\\ &= (1+\frac{|p|^2}{c^2})^{-\frac{n}{2}-1},\end{aligned}$$

Ainsi si $(x,p)\in\Phi^{-1}(\mathcal{D}(S))$ alors par conservation de l'énergie on obtient les égalités $|\tilde{S}_1(p,x)| = |p|$ et $\det J_\phi(\tilde{S}(p,x)) = \det J_\phi(p,x)$, ce qui avec (1.6.16) implique la propriété de conservation de la mesure de Lebesgue pour S.

1.7 Conclusion

Les conditions (1.1.3)-(1.1.4) sont les conditions sous lesquelles on étudiera le problème de diffusion inverse pour l'équation (1.1.1) mulitidimensionnelle ($n\geq 2$) aux hautes énergies (chapitre 2) et à énergie fixée (chapitre 3). Sous ces conditions, on a étudié dans ce chapitre le problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) et on a établi l'existence et les propriétés de l'opérateur S (défini par l'item iv du Théorème 1.1.1).

On peut étudier le problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) sous les conditions usuelles suivantes (plus générales que (1.1.3)-(1.1.4)) : il existe un entier $N\geq 2$ tel que V est de classe C^N sur $\mathbb{R}^n$ et B est de classe C^{N-1} sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $A_n(\mathbb{R})$) et

$$\begin{aligned}|\partial_x^j V(x)| &\leq \beta_{|j|}(1+|x|)^{-(\alpha+|j|)}, &(1.7.1)\\ |\partial_x^{j'} B_{i,k}(x)| &\leq \beta_{|j'|+1}(1+|x|)^{-(\alpha+|j'|+1)}, &(1.7.2)\end{aligned}$$

pour tous $x\in\mathbb{R}^n$, $|j|\leq N$, $|j'|\leq N-1$ ($j,j'\in\mathbb{N}^n$) où $\alpha>1$ est une constante réelle et les $\beta_{|j|}$ sont des contantes réelles positives. Alors on peut montrer, en particulier, que l'opérateur de diffusion S est de classe C^{N-1}. (Les conditions (1.7.1)-(1.7.2) impliquent que l'opérateur A défini par (1.3.11) est de classe C^{N-1} sur $\Sigma_0\times X_T$ pour tout $T\in\mathbb{R}$; alors les opérateurs d'ondes $\Omega^\pm$ sont des C^{N-1} difféomorphismes sur leur image.) Les conditions (1.7.1)-(1.7.2) sont un peu plus générales que celles sous lesquelles Yajima [Yaj82] a étudié le problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) en dimension 3 et pour $B\in\mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^3)$.

De même, on peut étudier le problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) sous les conditions suivantes (plus faibles que (1.1.3)-(1.1.4)) : $V\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $B\in C(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$, et

$$\begin{aligned}|\partial_x^j V(x)| \leq \beta_0(1+|x|)^{-\alpha-|j|}, &\quad (1.7.3)\\ |B_{i,k}(x)| \leq \beta_1(1+|x|)^{-\alpha-1}, &\quad (1.7.4)\\ |\nabla V(x)-\nabla V(y)| \leq \beta_2(1+\min(|x|,|y|))^{-\alpha-1}|x-y|, &\quad (1.7.5)\\ |B_{i,k}(x)-B_{i,k}(y)| \leq \beta_2(1+\min(|x|,|y|))^{-\alpha-1}|x-y|, &\quad (1.7.6)\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|j| \leq 1$, où $\alpha > 1$ est une constante réelle et les $\beta_{|j|}$ sont des constantes réelles positives. Sous ces conditions, le Théorème 1.1.1 reste vrai à l'exception de la régularité de l'opérateur de diffusion S : sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6) l'opérateur S est continu et n'est plus a priori de classe C^1. Sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6) le flot ψ (défini au début de la section 1.2) est continu sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (et n'est plus a priori de classe C^1), et le flot au temps t, ψ^t, préserve la mesure de Lebesgue. Sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6) la Proposition 1.3.1 reste vraie et l'opérateur A défini par (1.3.11) est continu sur $\Sigma_0 \times X_T$, $T \in \mathbb{R}$, et pour tout compact K de Σ_0, l'opérateur A restreint à $K \times M_T$ est une contraction par rapport à sa variable vivant dans M_T pour T_K suffisamment petit ; dès lors, sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6) le Théorème 1.3.1 reste vrai à l'exception de la régularité de l'opérateur d'onde Ω^+ : sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6) les opérateurs d'ondes sont des homéomorphismes sur leurs images. Sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6), les Lemmes 1.4.1 et 1.4.2 restent vrais (on peut utiliser ces deux lemmes pour montrer que les images des opérateurs d'ondes sont des ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; la continuité du flot ψ et des estimations similaires à (1.4.11) et (1.4.12) permettent, par exemple, de démontrer que l'application inverse des opérateurs d'ondes est continue). Sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6), le Théorème 1.5.1 reste vrai ainsi que les Lemmes 1.5.1 et 1.5.2, la Proposition 1.5.1 (avec de légères modifications) et le Corollaire 1.5.1, et la preuve du Théorème 1.5.1 est similaire à celle donnée sous les conditions (1.1.3)-(1.1.4). Sous les conditions (1.7.3)-(1.7.6), les résultats de la section 6 restent vrais, et leur preuve est inchangée. Les conditions (1.7.3)-(1.7.6) sont similaires aux conditions sous lequelles Simon [Sim71] a traité le problème de diffusion directe pour l'équation de Newton non relativiste (avec $B \equiv 0$).

En ce qui concerne une étude possible du problème de diffusion directe pour l'équation (1.1.1) sous des conditions de longue portée sur le potentiel V ou le champ B, nous renvoyons aux travaux de Herbst [Her74], Loss-Thaller [LT87], ou encore au livre de Derezinski-Gérard [DG97] et aux références contenues dans ce livre.

Chapitre 2

Problème de diffusion inverse aux hautes énergies

N. B. : l'essentiel de ce chapitre (hormis la section 8) est tiré de [Jol05a, Jol05b].

2.1 Introduction

2.1.1 Rappel

Soient $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $B = (B_{i,k}) \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$, $n \geq 2$. Nous considérons l'équation de Newton-Einstein

$$\begin{aligned} \dot{p} &= F(x, \dot{x}),\ F(x, \dot{x}) = -\nabla V(x) + \frac{1}{c} B(x)\dot{x}, \qquad (2.1.1) \\ p &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}}},\ \dot{p} = \frac{dp}{dt},\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Nous supposons que le potentiel V et le champ B vérifient les conditions

$$\begin{aligned} |\partial_x^j V(x)| &\leq \beta_{|j|}(1 + |x|)^{-(\alpha + |j|)}, \qquad (2.1.2) \\ |\partial_x^{j'} B_{i,k}(x)| &\leq \beta_{|j'|+1}(1 + |x|)^{-(\alpha + |j'| + 1)}, \qquad (2.1.3) \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|j| \leq 2$, $|j'| \leq 1$ ($j, j' \in \mathbb{N}^n$) où $\alpha > 1$ est une constante réelle et les $\beta_{|j|}$ sont des constantes réelles positives non nulles (V et B sont alors dits à courte portée).

Nous rappelons que si $n = 3$ et $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^3)$ alors l'équation (2.1.1) est l'équation de mouvement d'une particule de masse $m = 1$ et de charge $e = 1$ dans un champ électromagnétique statique externe décrit par (V, B) (voir [Ein07] ou section 17 de [LL71]). Dans cette équation x est la position de la particule, p son impulsion, et t désigne le temps et la constante c est la vitesse de la lumière.

Pour l'équation (2.1.1) l'énergie

$$E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p(t)|^2}{c^2}} + V(x(t))$$

est une intégrale première du mouvement (remarquons que $(1/c)B(x)\dot{x}$ est orthogonal à la vitesse $\dot{x}$ de la particule).

Nous rappelons le résultat principal du premier chapitre (Théorème 1.1.1). Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), on a : pour tout $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$, l'équation (2.1.1) a une unique solution $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$x(t) = v_- t + x_- + y_-(t), \tag{2.1.4}$$

où $\dot{y}_-(t) \to 0$, $y_-(t) \to 0$, quand $t \to -\infty$; de plus pour presque tout $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$,

$$x(t) = v_+ t + x_+ + y_+(t), \tag{2.1.5}$$

où $v_+ \neq 0$, $|v_+| = |v_-|$, $v_+ =: a(v_-, x_-)$, $x_+ =: b(v_-, x_-)$, $\dot{y}_+(t) \to 0$, $y_+(t) \to 0$, quand $t \to +\infty$.

L'opérateur $S : B_c \times \mathbb{R}^n \to B_c \times \mathbb{R}^n$ défini par les formules

$$v_+ = a(v_-, x_-),\ x_+ = b(v_-, x_-) \tag{2.1.6}$$

est appelé opérateur de diffusion pour l'équation (2.1.1). On appelle les données $a(v_-, x_-)$, $b(v_-, x_-)$, les données de diffusion pour l'équation (2.1.1).

Désignons par $\mathcal{D}(S)$ l'ensemble de définition de S ; et désignons par $\mathcal{R}(S)$ l'image de S (par définition, si $(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S)$, alors $v_- \neq 0$ et $a(v_-, x_-) \neq 0$).

Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), l'opérateur S a les propriétés suivantes : $\mathcal{D}(S)$ est un ouvert de $B_c \times \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Mes}((B_c \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{D}(S)) = 0$ pour la mesure de Lebesgue sur $B_c \times \mathbb{R}^n$ induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; l'opérateur $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{R}(S)$ est continu et préserve la mesure de Lebesgue ; et par conservation de l'énergie $a(v_-, x_-)^2 = v_-^2$ pour tout $(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S)$.

2.1.2 Une écriture des données de diffusion

Si $V(x) \equiv 0$ et $B(x) \equiv 0$, alors $a(v_-, x_-) = v_-$, $b(v_-, x_-) = x_-$, $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$. Par conséquent on décide d'écrire les données de diffusion $a(v_-, x_-), b(v_-, x_-)$ sous la forme

$$\begin{aligned} a(v_-, x_-) &= v_- + a_{sc}(v_-, x_-), \\ b(v_-, x_-) &= x_- + b_{sc}(v_-, x_-), \end{aligned} \quad (v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S) \tag{2.1.7}$$

(on rappelle que V et B sont à courte portée). On utilisera le fait que sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), l'opérateur S est uniquement déterminé par sa restriction à $\mathcal{M}(S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{M}$, où

$$\mathcal{M} = \{(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n | v_- \neq 0, v_- \circ x_- = 0\}$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ (en effet si $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ vérifie l'équation (2.1.1) alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $y(t) = x(t + t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, vérifie aussi l'équation (2.1.1)).

2.1.3 La transformée de rayons X

Soit
$$T\mathbb{S}^{n-1} = \{(\theta, x) \mid \theta \in \mathbb{S}^{n-1}, x \in \mathbb{R}^n, \theta \circ x = 0\},$$
où $\mathbb{S}^{n-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Nous utiliserons la transformée de rayons X, que l'on définit comme suit : pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$|f(x)| = O(|x|^{-\beta}), \text{ quand } |x| \to \infty, \text{ pour un réel } \beta > 1,$$

on appelle transformée de rayons X de f, la fonction de $C(T\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^m)$, notée Pf, et définie par

$$Pf(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\theta + x)dt, \ (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}.$$

Concernant la théorie sur la transformée de rayons X, on renvoie à la section A.3 de l'annexe et aux références données dans cette section A.3.

2.1.4 Résultats principaux

Dans ce chapitre les résultats principaux consistent en des estimations pour une diffusion aux petits angles pour les données de diffusion a_{sc} et b_{sc} (et pour les solutions de diffusion) pour l'équation (2.1.1), et en l'application de ces asymptotiques et estimations au problème de diffusion inverse aux hautes énergies pour l'équation (2.1.1). Nos résultats principaux incluent, en particulier, le Théorème 2.1.1, et les Propositions 2.1.1, 2.1.2, formulés ci-dessous dans cette section et les Théorèmes 2.3.1, 2.3.2 donnés dans la Section 2.3.

Théorème 2.1.1. *Soit* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, *et soit* r *une constante positive telle que* $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3), *on a*

$$\lim_{\substack{s \to c \\ s < c}} \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}} a_{sc}(s\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau\theta + x, c\theta)d\tau, \tag{2.1.8}$$

et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau\theta + x, s\theta)d\tau - \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}} a_{sc}(s\theta, x) \right| \le \frac{n^3 2^{2\alpha+7}(1 + \frac{1}{c})^2 c}{\alpha(\alpha - 1)(\frac{s_1}{\sqrt{2}} - r)^4} \times \frac{\tilde{\beta}^2(\frac{c}{\sqrt{2}} + 1 - r)^2}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{4(c^2 - s^2)}}(1 + \frac{|x|}{\sqrt{2}})^{2\alpha - 1}}, \tag{2.1.9}$$

pour tout $s_1 < s < c$, *où* $s_1 = s_1(c, n, \beta_1, \beta_2, \alpha, |x|, r)$ *est défini à la fin de la section 2.3 ;*

$$\lim_{\substack{s\to c\\ s<c}} \frac{s^2}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} b_{sc}(s\theta, x) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma\theta + x, c\theta)d\sigma d\tau \qquad (2.1.10)$$
$$- \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} F(\sigma\theta + x, c\theta)d\sigma d\tau + PV(\theta, x)\theta,$$

et

$$\left| \frac{b_{sc}(s\theta, x)}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} - \frac{1}{c^2}PV(\theta, x)\theta + \frac{1}{s^2}\int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} F(\sigma\theta + x, s\theta)d\sigma d\tau \right.$$
$$\left. -\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma\theta + x, s\theta)d\sigma d\tau \right| \le C_2\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}} \qquad (2.1.11)$$

pour tout $s_2 < s < c$, *où* $C_2 = C_2(c, n, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha, |x|, r)$ *et* $s_2 = s_2(c, n, \beta_1, \beta_2, \alpha, |x|, r)$ *sont définis à la fin de la section 2.3.*

On démontre le Théorème 2.1.1 à partir du Théorème 2.3.1 et du Théorème 2.3.2 donnés dans la Section 2.3.

Considérons les fonctions vectorielles $w_1(V, B, \theta, x)$ et $w_2(V, B, \theta, x)$, $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, qui apparaissent dans le côté droit des égalités (2.1.8) et (2.1.10) :

$$w_1(V, B, \theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau\theta + x, c\theta)d\tau \qquad (2.1.12)$$

$$w_2(V, B, \theta, x) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma\theta + x, c\theta)d\sigma d\tau \qquad (2.1.13)$$
$$- \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} F(\sigma\theta + x, c\theta)d\sigma d\tau + PV(\theta, x)\theta.$$

Remarque 2.1.1. En utilisant en particulier que B est antisymétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$, on voit que les vecteurs $w_1(V, B, \theta, x)$, $w_2(V, B, \theta, x)$ sont orthogonaux à θ pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

Désignons par $\tilde{w_1}(V, B)$ la fonction de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{w_1}(V, B)(y, x) = -|y|\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla V(sy + x)ds + \int_{-\infty}^{+\infty} B(sy + x)y ds$$
$$= |y|w_1(V, B, \frac{y}{|y|}, x - \frac{xy}{|y|^2}y), \qquad (2.1.14)$$

pour tous $y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), $\tilde{w_1}(V, B) = (\tilde{w_1}(V, B)_1, .., \tilde{w_1}(V, B)_n) \in C^1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Pour tout $i, k = 1..n,\ i \neq k$, on désigne par $\mathcal{V}_{i,k}$ la sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{V}_{i,k} = \{(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1} | \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n),\ \theta_j = 0, j = 1 \ldots n, j \neq i, j \neq k\}. \tag{2.1.15}$$

Proposition 2.1.1. *Soit* $(V, B) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$. *Si* (V, B) *vérifie* (2.1.2)-(2.1.3)*, alors* $w_1(V, B, \theta, x)$ *donné pour tout* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *détermine de manière unique* (V, B) *et on a les formules suivantes :*

$$P(\nabla V)(\theta, x) = -\frac{1}{2}(w_1(V, B, \theta, x) + w_1(V, B, -\theta, x)), \tag{2.1.16}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *;*

et

$$\begin{aligned} PB_{i,k}(\theta, x) &= \theta_k \frac{1}{2}(w_1(V, B, \theta, x)_i - w_1(V, B, -\theta, x)_i) \\ &\quad -\theta_i \frac{1}{2}(w_1(V, B, \theta, x)_k - w_1(V, B, -\theta, x)_k), \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

pour tous $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k},\ i, k = 1..n,\ i \neq k$ *;*

de plus si B *appartient à* $\mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ *alors*

$$\begin{aligned} P(B_{i,k})(\theta, x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{w_1}(V, B))_i(y, x) + \frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{w_1}(V, B))_i(-y, x)\right. \\ &\quad \left. -\frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{w_1}(V, B))_k(y, x) - \frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{w_1}(V, B))_k(-y, x)\right]_{|y=\theta}, \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1},\ i, k = 1..n,\ i \neq k$.

Remarque 2.1.2. En utilisant les formules (2.1.16), (2.1.17), et les méthodes de reconstruction d'une fonction à partir de sa transformée de rayons X (voir section A.3), $B_{i,k}$ et V peuvent être reconstruits à partir de $w_1(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k},\ i, k = 1..n,\ i \neq k$.

Proposition 2.1.2. *Soit* $(V, B) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$. *Si* (V, B) *vérifie* (2.1.2)-(2.1.3)*, alors :*

(i) $w_2(V, B, \theta, x)$ *donné pour tout* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *ne détermine pas de manière unique* V *;*

(ii) pour $n = 2$, $w_2(V, B, \theta, x)$ *donné pour tout* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *ne détermine pas de manière unique* B *;*

(iii) pour $n \geq 3$, *si* $B \notin \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $w_2(V, B, \theta, x)$ *donné pour tout* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *ne détermine pas de manière unique* B *;*

(iv) pour $n \geq 3$, *si* $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $w_2(V, B, \theta, x)$ *donné pour tout* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *détermine de manière unique* B.

Dans la section 2.4 (voir Proposition 2.4.4) et dans le cas où $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, on donne une formule ((2.4.21)) qui montre que, pour $n = 3$, la transformée de Fourier des dérivées partielles premières de B peut être reconstruite à partir de $w_2(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, et on donne une formule ((2.4.22)) qui montre que pour $n \geq 4$ la transformée de rayons X de B peut être reconstruite à partir de $w_2(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

Les Propositions 2.1.1, 2.1.2, sont démontrées dans la section 2.4.

A partir de (2.1.8), (2.1.16) et (2.1.17), et à partir des formules d'inversion de la transformée de rayons X pour $n \geq 2$ (voir section A.3 de l'annexe) nous obtenons que a_{sc} détermine de manière unique ∇V et B aux hautes énergies. De plus, pour $n \geq 2$, les méthodes de reconstruction de f à partir de Pf (voir section A.3 de l'annexe et les références données dans cette section A.3) permettent de reconstruire ∇V et B à partir de la composante vitesse a de l'opérateur de diffusion aux hautes énergies. La formule (2.1.10) et la Proposition 2.1.2 montrent que le premier terme de l'asymptotique de b_{sc} ne détermine pas de manière unique le potentiel V quand $n \geq 2$ et B quand $n = 2$ ou $n \geq 3$ si $B \notin \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, mais qu'il détermine B quand $n \geq 3$ et $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$.

On peut préciser (i) et (ii) de la Proposition 2.1.2 : F. Nicoleau nous a fait remarqué que la fonction vectorielle $w_2(V, B, \theta, x), (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, détermine de manière unique V modulo les potentiels radiaux quand $n \geq 2$ (voir section A.4 de l'annexe), et que $w_2(V, B, \theta, x), (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, détermine de manière unique B modulo les champs radiaux quand $n = 2$ (voir section A.4 de l'annexe).

Le problème de diffusion inverse pour l'équation de Newton multidimensionnelle, pour des potentiels $V \in C^2$ vérifiant (2.1.2) et $B \equiv 0$, a été étudié pour la première fois par Novikov [Nov99]. Novikov a prouvé deux formules qui lient les données de diffusion aux hautes énergies aux transformées de rayons X de $-\nabla V$ et de V. En développant l'approche de Novikov [Nov99], l'auteur a généralisé ces deux formules au cas relativiste sans champ magnétique [Jol05a]. En développant ce travail, nous obtenons le Théorème 2.1.1. Notons que Gerver-Nadirashvili [GN83] ont étudiée pour la première fois un problème inverse au bord et aux hautes énergies pour l'équation de Newton classique multidimensionnelle dans un domaine borné strictement convexe.

À notre connaissance, le problème de diffusion inverse pour une particule dans un champ électromagnétique en mécanique classique relativiste et non relativiste n'a pas été considéré avant [Jol05b] (concernant les résultats donnés dans la littérature sur ce problème pour $B \equiv 0$ voir [Nov99], [Jol05a] et les références données dans ces articles). Cependant, en mécanique quantique le problème de diffusion inverse pour une particule dans un champ électromagnétique $B \not\equiv 0$ a été considéré, en particulier, dans [HN88], [ER95], [Ito95], [Jun97], [ER97], [Nic97], [Ari97], [Hac99], [WY05] (concernant les résultats donnés dans la littérature sur ce problème pour $B \equiv 0$, voir, de plus, [Fad56], [EW95], [Nov05] et les références données dans [Nov05]).

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2 on transforme l'équation différentielle (2.1.1) avec conditions initiales (2.1.4) en un système d'équations intégrales de la forme $(y_-, \dot{y}_-) = A_{v_-,x_-}(y_-, \dot{y}_-)$. Ensuite on étudie l'opérateur A_{v_-,x_-} sur un espace convenable et on donne des estimations et des estimations de contraction sur A_{v_-,x_-} (Lemmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3). Dans la Section 2.3 on donne des estimations et l'asymptotique pour la déflection $y_-(t)$ (définie dans (2.1.4)) et pour les données de diffusion $a_{sc}(v_-, x_-)$, $b_{sc}(v_-, x_-)$ (définie par (2.1.7)) (Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2). De ces estimations et de ces asymptotiques, on déduit les deux formules (2.1.8) et (2.1.10) quand les paramètres c, β_m, α, n, $\hat{v}_-$, x_- sont fixés et $|v_-|$ augmente (où $\beta_{|j|}$, α, n sont les constantes apparaissant dans (2.1.2)-(2.1.3), $\beta_m = \max(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$; $\hat{v}_- = v_-/|v_-|$). Dans ces cas $\sup|\theta(t)|$ décroît, où $\theta(t)$ désigne l'angle entre les vecteurs $\dot{x}(t) = v_- + \dot{y}_-(t)$ et v_-, et nous sommes dans le cas d'une diffusion aux petits angles. Remarquons que, sous les conditions du Théorème 2.3.1, sans hypothèses supplémentaires, on a l'estimation $\sup|\theta(t)| < \frac{1}{4}\pi$ et nous sommes alors déjà dans le cas d'une diffusion plutôt aux petits angles (concernant le terme « diffusion aux petits angles », voir Section 20 de [LL60]). Le Théorème 2.1.1 provient des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2. Dans la section 2.4 on prouve les Propositions (2.1.1), (2.1.2). Dans la section 2.5, on introduit des estimations utiles pour la preuve des Lemmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 et du Théorème 2.3.2. Dans la section 2.6, on prouve les Lemmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3. Dans la section 2.7, on prouve le Théorème 2.3.2. Enfin, dans la section 2.8, en guise de conclusion du chapitre, on utilise les résultats obtenus dans les sections 2.2, 2.3, pour donner des estimations et l'asymptotique du temps de retard pour l'équation (2.1.1) toujours dans le cas d'une diffusion aux petits angles (Théorèmes 2.8.1 et 2.8.2) ; et on s'intéresse à la question de la reconstruction de V, B à partir de l'asymptotique aux hautes énergies du temps de retard pour l'équation (2.1.1) (Proposition 2.8.1).

2.2 Une application contractante

Transformons l'équation différentielle (2.1.1) en un système d'équations intégrales. Rappelons tout d'abord que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to B_c$ definie par (1.2.8),

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{c^2}}},\ x \in \mathbb{R}^n$$

a, en particulier, les propriétés suivantes :

$$|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{n}|x - y|,\ \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.1}$$

et g est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur B_c, et son inverse est donné par

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{|x|^2}{c^2}}},\ x \in B_c.$$

Si x vérifie l'équation différentielle (2.1.1) et les conditions initiales (2.1.4), alors x satisfait le sytème d'équations intégrales

$$x(t) = v_- t + x_- + \int_{-\infty}^{t} \left[g\left(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(x(s), \dot{x}(s)))ds \right) - v_- \right] d\tau, \quad (2.2.2)$$

$$\dot{x}(t) = g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(x(s), \dot{x}(s))ds), \quad (2.2.3)$$

où $F(x,\dot{x}) = -\nabla V(x) + \frac{1}{c}B(x)\dot{x},\ v_- \in B_c\backslash\{0\}$.

Pour $y_-(t)$ défini dans (2.1.4), ce système d'équations intégrales devient

$$(y_-(t), u_-(t)) = A_{v_-,x_-}(y_-, u_-)(t), \quad (2.2.4)$$

où $u_- = \dot{y}_-$ et

$$\begin{aligned}
A_{v_-,x_-}(f,h)(t) &= (A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t), A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)) \\
A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) &= \int_{-\infty}^{t} \left[g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds) - v_- \right] d\tau, \\
A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t) &= g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds) - v_-,
\end{aligned}$$

pour $v_- \in B_c\backslash\{0\}$, $x_- \in \mathbb{R}^n$.

De (2.2.4), (2.1.2)-(2.1.3), (2.2.1) (appliqué à « x »$= g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_- s + x_- + y_-(s), v_- + \dot{y}_-(s))ds$ et « y »$= g^{-1}(v_-)$) et de $y_-(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $|y_-(t)| + |\dot{y}_-(t)| \to 0$, quand $t \to -\infty$, il vient en particulier que

$$\begin{array}{l} (y_-(t), \dot{y}_-(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ \text{et } |\dot{y}_-(t)| = O(|t|^{-\alpha}),\ |y_-(t)| = O(|t|^{-\alpha+1}),\ \text{as } t \to -\infty, \end{array} \quad (2.2.5)$$

où $v_- \in B_c\backslash\{0\}$ et $x_- \in \mathbb{R}^n$ sont fixés.

On considère l'espace métrique complet

$$\begin{array}{l} M_{T,r} = \{(f,h) \in C(]-\infty, T], \mathbb{R}^n) \times C(]-\infty, T], \mathbb{R}^n) |\ \|(f,h)\|_T \le r\}, \\ \text{où } \|(f,h)\|_T = \max\left(\sup_{t\in]-\infty,T]} |h(t)|, \sup_{t\in]-\infty,T]} |f(t) - th(t)| \right) \end{array} \quad (2.2.6)$$

(où pour $T = +\infty$, $]-\infty, T]$ doit être remplacé par $]-\infty, +\infty[$). De (2.2.5) on a, à $T < +\infty$ fixé,

$$(y_-(t), \dot{y}_-(t)) \in M_{T,r} \text{ pour un réel } r \text{ dépendant de } y_-(t) \text{ et de } T. \tag{2.2.7}$$

Soit le réel $z_1(c, n, \beta_1, \alpha, r_x, r)$ défini comme l'unique solution de l'équation

$$\frac{z_1}{\sqrt{1-\frac{z_1^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(z_1/\sqrt{2}-r)(r_x/\sqrt{2}+1)^\alpha} = 0,\ \ z_1 \in]\sqrt{2}r, c[, \tag{2.2.8}$$

où r_x et r sont des réels positifs tels que $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$.

Lemme 2.2.1. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3)*, on a : si* $(f, h) \in M_{T,r}$, $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $x_- \in \mathbb{R}^n$, $v_- \in B_c$, $|v_-| \ge z_1(c, n, \beta_1, \alpha, |x_-|, r)$, $v_- \circ x_- = 0$, *alors*

$$\begin{aligned}\|A_{v_-,x_-}(f,h)\|_T &\le \rho_T(c, n, \beta_1, \alpha, |v_-|, |x_-|, r) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \\ &\quad \times \frac{2^{\alpha+1}n^{3/2}\beta_1(2+r/c)(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)}{(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2}-(|v_-|/\sqrt{2}-r)T)^{\alpha-1}}\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

pour $T \le 0$ *;*

$$\begin{aligned}\|A_{v_-,x_-}(f,h)\|_T &\le \rho(c, n, \beta_1, \alpha, |v_-|, |x_-|, r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \\ &\quad \times \frac{2^{\alpha+2}n^{3/2}\beta_1(2+r/c)(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)}{(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha-1}}\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

pour $T \le +\infty$ *; si* (f_1, h_1), $(f_2, h_2) \in M_{T,r}$, $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $|v_-| < c$, $v_- \circ x_- = 0$, $|v_-| \ge z_1(c, n, \beta_1, \alpha, |x_-|, r)$, *alors*

$$\|A_{v_-,x_-}(f_2,h_2) - A_{v_-,x_-}(f_1,h_1)\|_T \le \lambda_T(c, n, \tilde{\beta}, \alpha, |v_-|, |x_-|, r)\|(f_2-f_1, h_2-h_1)\|_T, \tag{2.2.11}$$

$$\begin{aligned}\lambda_T(c, n, \tilde{\beta}, \alpha, |v_-|, |x_-|, r) &= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \\ &\quad \times \frac{2^{\alpha+3}n^2\tilde{\beta}(1+\frac{1}{c})(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)^2}{(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^3(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}}-(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)T)^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

pour $T \le 0$ *;*

$$\|A_{v_-,x_-}(f_2,h_2) - A_{v_-,x_-}(f_1,h_1)\|_T \le \lambda(c, n, \tilde{\beta}, \alpha, |v_-|, |x_-|, r)\|(f_2-f_1, h_2-h_1)\|_T, \tag{2.2.12}$$

$$\lambda(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r) = \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \times\frac{2^{2\alpha+7}3n^{7/2}\tilde\beta(1+\tilde\beta)(1+1/c)^3(|v_-|/\sqrt2+1-r)^3}{(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt2-r)^4(1+|x_-|/\sqrt2)^{\alpha-1}}$$

pour $T\le+\infty$, *où* $\tilde\beta=\max(\beta_1,\beta_2)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
&\max\left(\frac{\rho_T(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)}{r},\lambda_T(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)\right)\\
&\le \mu_T(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r) \qquad (2.2.13)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}}\\
&\times\frac{2^{\alpha+3}n^2\tilde\beta(1+1/c)(|v_-|/\sqrt2+1-r)^2}{r(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt2-r)^3(1+|x_-|/\sqrt2-(|v_-|/\sqrt2-r)T)^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

pour $T\le 0$;

$$\begin{aligned}
&\max\left(\frac{\rho(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)}{r},\lambda(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)\right)\\
&\le \mu(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r) \qquad (2.2.14)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}}\\
&\times\frac{2^{2\alpha+7}3n^{7/2}\tilde\beta(1+\tilde\beta)(1+1/c)^3(|v_-|/\sqrt2+1-r)^3}{r(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt2-r)^4(1+|x_-|/\sqrt2)^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

pour $T\le+\infty$, où $\tilde\beta=\max(\beta_1,\beta_2)$, $0<r\le1$, $r<c/\sqrt2$, $|v_-|<c$, $|v_-|\ge z_1$, $v_-\circ x_-=0$.

En utilisant le Lemme 2.2.1 et les estimations (2.2.13)-(2.2.14), nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.2.1. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3), $0<r\le1$, $r<c/\sqrt2$, $x_-\in\mathbb{R}^n$, $v_-\in B_c$, $|v_-|\ge z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$, $v_-\circ x_-=0$, *on a :*

si $\mu_T(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)<1$, *alors* A_{v_-,x_-} *est une application contractante de* $M_{T,r}$ *pour* $T\le0$;

si $\mu(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)<1$, *alors* A_{v_-,x_-} *est une application contractante de* $M_{T,r}$ *pour* $T\le+\infty$.

En prenant en compte à la fois (2.2.7), le Lemme 2.2.1, le Corollaire 2.2.1 et le lemme A.2.1 (énoncé dans la section A.2 de l'annexe), on étudie la solution $(y_-(t),u_-(t))$ de l'équation (2.2.4) dans $M_{T,r}$.

On utilisera aussi les résultats suivants (Lemmes 2.2.2 et 2.2.3).

Lemme 2.2.2. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3), $(f,h) \in M_{T,r}$, $0 < r \leq 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $x_- \in \mathbb{R}^n$, $v_- \in B_c$, $|v_-| \geq z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$, $v_- \circ x_- = 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} |A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)| &\leq \zeta_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \\ &\quad \times \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2}-r)(1+|x_-|/\sqrt{2}-(|v_-|/\sqrt{2}-r)t)^{\alpha}}, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

$$\begin{aligned} |A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t)| &\leq \xi_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}} \\ &\quad \times \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)}{\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^2(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}}-(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)t)^{\alpha-1}}, \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

pour tout $t \leq T$, $T \leq 0$ *;*

$$A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) = k_{v_-,x_-}(f,h)t + l_{v_-,x_-}(f,h) + H_{v_-,x_-}(f,h)(t), \tag{2.2.17}$$

où

$$k_{v_-,x_-}(f,h) = g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{+\infty} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))\,ds)-v_-, \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned} & l_{v_-,x_-}(f,h) = \\ & \int_{-\infty}^{0}\left[g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))\,ds)-v_-\right]d\tau \\ & +\int_{0}^{+\infty}\left[g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))\,ds)\right. \\ & \left. -g(\gamma(v_-)+\int_{-\infty}^{+\infty} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))\,ds)\right]d\tau, \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$
\begin{aligned}
|k_{v_-,x_-}(f,h)| &\leq 2\zeta_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,0), && (2.2.20)\\
|l_{v_-,x_-}(f,h)| &\leq 2\xi_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,0), && (2.2.21)\\
|\dot H_{v_-,x_-}(f,h)(t)| &\leq \zeta_+(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t) && (2.2.22)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}\alpha(|v_-|/\sqrt{2}-r)}\\
&\quad\times\frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)}{(1+|x_-|/\sqrt{2}+(|v_-|/\sqrt{2}-r)t)^{\alpha}},\\
|H_{v_-,x_-}(f,h)(t)| &\leq \xi_+(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t) && (2.2.23)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}\alpha(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2}\\
&\quad\times\frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)}{(1+|x_-|/\sqrt{2}+(|v_-|/\sqrt{2}-r)t)^{(\alpha-1)}},
\end{aligned}
$$

pour $T=+\infty,\ t\geq 0.$

On peut voir que le Lemme 2.2.2 donne, en particulier, des estimations et l'asymptotique de

$$A_{v_-,x_-}(f,h)(t) = (A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t), A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)) \text{ quand } t\to\pm\infty.$$

Lemme 2.2.3. *Soient* $T=+\infty,\ 0<r\leq 1,\ r<c/\sqrt{2},\ x_-\in\mathbb{R}^n,\ v_-\in B_c,$ $|v_-|\geq z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r),\ v_-\circ x_-=0,$ *et soit* $(y_-,u_-)\in M_{T,r}$ *une solution de* (2.2.4). *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3), *on a*

$$
\begin{aligned}
|k_{v_-,x_-}(y_-,u_-)-k_{v_-,x_-}(0,0)| &\leq \varepsilon'_a(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)\\
&= \frac{n^2\tilde\beta(1+\frac{1}{c})(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)}{(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha}} \quad (2.2.24)\\
&\quad\times\frac{2^{\alpha+4}\rho(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)}{\alpha\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{k_{v_-,x_-}(y_-,u_-)}{\sqrt{1-\frac{|v_-|^2}{c^2}}}-\int_{-\infty}^{+\infty}F(x_-+v_-s,v_-)\,ds\right|\\
&\leq \varepsilon_a(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r) \qquad (2.2.25)\\
&= \frac{2^{\alpha+4}n^{3/2}\tilde\beta(1+\frac{1}{c})(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha}}\rho(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} |l_{v_-,x_-}(y_-,u_-) - l_{v_-,x_-}(0,0)| &\leq \varepsilon_b(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r) \qquad (2.2.26)\\ &= \frac{2^{2\alpha+7}n^{7/2}\tilde\beta(1+\tilde\beta)(\frac{|v_-|}{\sqrt2}+1-r)^2}{\alpha(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt2-r)^4(1+|x_-|/\sqrt2)^{\alpha-1}}\\ &\quad\times\frac{3(1+1/c)^3\rho(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)}{\sqrt{1+|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2))}}, \end{aligned}$$

où k_{v_-,x_-} *et* l_{v_-,x_-} *sont définis par* (2.2.18)-(2.2.19) *et* ρ *est défini par* (2.2.10).

La preuve des Lemmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, est donnée dans la section 2.6.

2.3 Diffusion aux petits angles

Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), pour tout $(v_-,x_-)\in B_c\times\mathbb{R}^n$, $v_-\neq 0$, l'équation (2.1.1) a une unique solution $x\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ de conditions initiales (2.1.4). Considérons la fonction y_- apparaissant dans (2.1.4). Cette fonction décrit la déflection par rapport au mouvement libre.

En utilisant le Corollaire 2.2.1, le lemme A.2.1, et les Lemmes 2.2.2 et 2.2.3, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.3.1. *Supposons les conditions* (2.1.2)-(2.1.3) *vérifiées. Soient* $\tilde\beta=\max(\beta_1,\beta_2)$, $0<r\leq 1$, $r<c/\sqrt2$, $x_-\in\mathbb{R}^n$, $v_-\in B_c$, $|v_-|\geq z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$, $v_-\circ x_-=0$ *où* z_1 *est défini par* (2.2.8). *Supposons* $\mu(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)<1$ *où* μ *est défini par* (2.2.14). *Alors la déflection* $y_-(t)$ *vérifie :*

$$(y_-,\dot y_-)\in M_{T,r},\ T=+\infty; \qquad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} |\dot y_-(t)| &\leq \zeta_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t), &(2.3.2)\\ |y_-(t)| &\leq \xi_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t) \quad \textit{pour} \quad t\leq 0; &(2.3.3)\\ y_-(t) &= a_{sc}(v_-,x_-)t+b_{sc}(v_-,x_-)+h(v_-,x_-,t), &(2.3.4) \end{aligned}$$

et

$$\left|a_{sc}(v_-,x_-)-\left[\frac{g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-,v_-)ds}{\sqrt{1+\frac{|g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-,v_-)ds|^2}{c^2}}}-v_-\right]\right|$$
$$\leq \varepsilon_a'(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r), \qquad (2.3.5)$$

$$\left|\frac{a_{sc}(v_-,x_-)}{\sqrt{1-\frac{|v_-|^2}{c^2}}}-\int_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-,v_-)ds\right|\leq\varepsilon_a(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r), \qquad (2.3.6)$$

$$|b_{sc}(v_-,x_-)-l_{v_-,x_-}(0,0)|\leq\varepsilon_b(c,n,\beta_1,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r), \qquad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned}
|a_{sc}(v_-,x_-)| &\le 2\zeta_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,0), && (2.3.8)\\
|b_{sc}(v_-,x_-)| &\le 2\xi_-(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,0), && (2.3.9)\\
|\dot h(v_-,x_-,t)| &\le \zeta_+(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t), && (2.3.10)\\
|h(v_-,x_-,t)| &\le \xi_+(c,n,\beta_1,\alpha,|v_-|,|x_-|,r,t), && (2.3.11)
\end{aligned}$$

pour tout $t \ge 0$, où $l_{v_-,x_-}(0,0)$ (resp. ε'_a, ε_a, ε_b, ζ_-, ζ_+, ξ_- et ξ_+) est défini dans (2.2.19) *(resp.* (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26), (2.2.15), (2.2.22), (2.2.16) *et* (2.2.23)*).*

Soit $\tilde\beta = \max(\beta_1,\beta_2)$ et soit r_x un réel positif. Soient les réels $z = z(c,n,\tilde\beta,\alpha,r_x,r)$ et $z_2 = z_2(c,n,\beta_1,\alpha,r_x)$ définis comme les solutions (uniques) des équations suivantes

$$\mu(c,n,\tilde\beta,\alpha,z,r_x,r) = 1,\ z \in]\sqrt{2}r, c[, \qquad (2.3.12)$$

$$\frac{z_2}{\sqrt{1-\frac{z_2^2}{c^2}}} - \frac{16\beta_1 n}{\alpha(z_2/\sqrt{2})(1+r_x/\sqrt{2})^\alpha} = 0,\ z_2 \in]0,c[, \qquad (2.3.13)$$

où μ est défini par (2.2.14), et r est un réel positif tel que $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$.

On utilisera les observations suivantes.

(I) Soient $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $0 \le \sigma$

$$\frac{s_1}{\sqrt{1-\frac{s_1^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(s_1/\sqrt{2}-r)(\sigma/\sqrt{2}+1)^\alpha} > \frac{s_2}{\sqrt{1-\frac{s_2^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(s_2/\sqrt{2}-r)(\sigma/\sqrt{2}+1)^\alpha}$$

pour tous réels s_1, s_2 tels que $\sqrt{2}r < s_2 < s_1 < c$.

(II) Soient $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $\sigma \in]\sqrt{2}r, c[$,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(\sigma/\sqrt{2}-r)(s_1/\sqrt{2}+1)^\alpha} > \frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(\sigma/\sqrt{2}-r)(s_2/\sqrt{2}+1)^\alpha}$$

pour tous réels s_1, s_2 tels que $0 \le s_2 < s_1$.

(III) Soient x un réel positif, $\tilde\beta = \max(\beta_1,\beta_2)$ et soit r un réel tel que $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, alors pour tout réel $s \in]\sqrt{2}r, c[$ on a

$$\mu(c,n,\tilde\beta,\alpha,s,|x|,r) < 1 \Leftrightarrow s > z(c,n,\tilde\beta,\alpha,|x|,r).$$

Les observations (I) et (II) impliquent que $z_1(c,n,\beta_1,\alpha,s_2,r) > z_1(c,n,\beta_1,\alpha,s_1,r)$ pour tous réels s_1, s_2 tels que $\sqrt{2}r < s_2 < s_1 < c$ quand c, β_1, α, n, r sont fixés.

Le Théorème 2.3.1 donne, en particulier, des estimations pour le phénomène de diffusion et une asymptotique de la composante vitesse de l'opérateur de diffusion lorsque c, β_1, β_2, α, n, $\hat v_-$, x_- sont fixés (où $\hat v_- = v_-/|v_-|$) et $|v_-|$ croît ou, e.g., lorsque c, β_1, β_2, α, n, v_-, $\hat x_-$ sont fixés et

$|x_-|$ croît. Dans ces cas $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\theta(t)|$ décroît, où $\theta(t)$ désigne l'angle entre $\dot{x}(t) = v_- + \dot{y}_-(t)$ et v_-, et on est dans le cas d'une diffusion aux petits angles. Remarquons que déjà sous les conditions du Théorème 2.3.1, sans hypothèses supplémentaires, on a l'estimation $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\theta(t)| < \frac{1}{4}\pi$ et on est dans le cas d'une diffusion aux angles plutôt petits. Le Théorème 2.3.1 avec (2.3.7) donnera l'asymptotique de la composante espace de configuration $b(v_-, x_-)$ de l'opérateur de diffusion si l'on peut étudier l'asymptotique de $l_{v_-,x_-}(0,0)$. C'est le sujet du Théorème 2.3.2.

Théorème 2.3.2. *Fixons c, n, β_0, β_1, α, $|x|$. Alors il existe une constante $C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}$ telle que*

$$\left|\frac{l_{v,x}(0,0)}{\sqrt{1-\frac{|v|^2}{c^2}}} - \frac{1}{c^2}PV(\hat{v},x)\hat{v} + \frac{1}{|v|^2}\int_0^{+\infty}\int_\tau^{+\infty} F(\sigma\hat{v}+x,v)d\sigma d\tau \right.$$
$$\left. -\frac{1}{|v|^2}\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^\tau F(\sigma\hat{v}+x,v)d\sigma d\tau\right| \le C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}\sqrt{1-\frac{|v|^2}{c^2}} \qquad (2.3.14)$$

pour tous $v \in B_c$, $|v| \ge z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, $v \circ x = 0$, où $\hat{v} = v/|v|$.

La preuve du Théorème 2.3.2 est donnée dans la Section 2.7.

Comme nous l'avons mentionné dans l'Introduction, le Théorème 2.1.1 se déduit des Théorèmes 2.3.1, 2.3.2. De plus, les constantes C_2, s_1, s_2, qui apparaissent au Théorème 2.1.1, sont données explicitement par

$$\begin{aligned}
s_1 &= \max(z(c,n,\tilde{\beta},\alpha,|x|,r), z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x|,r)),\\
s_2 &= \max(z(c,n,\tilde{\beta},\alpha,|x|,r), z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x|,r), z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)),\\
C_2 &= C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|} + \frac{3n^5\tilde{\beta}^2(1+\tilde{\beta})2^{3\alpha+13}(1+1/c)^4(\frac{c}{\sqrt{2}}+1-r)^3}{(\alpha-1)^2(\frac{s_2}{\sqrt{2}}-r)^6(1+\frac{|x|}{\sqrt{2}})^{2\alpha-2}},
\end{aligned}$$

où $C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}$ est la constante apparaissant au Théorème 2.3.2 et z, z_1, z_2 sont définis par (2.3.12), (2.2.8), (2.3.13) et $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$.

En utilisant les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, nous pouvons obtenir l'asymptotique et des estimations pour des fonctions s'exprimant à l'aide de $a(v_-, x_-)$ et $b(v_-, x_-)$ lorsque l'on considère de la diffusion aux petits angles. Nous considérerons notamment le cas du temps de retard dans la Section 2.8.

2.4 Preuves des Propositions 2.1.1, 2.1.2

Dans cette section, on démontre les Propositions 2.1.1, 2.1.2. Nous commençons par introduire de nouvelles notations (sous-section 2.4.1) puis nous démontrons la Proposition 2.1.1 (sous-section 2.4.2) et la Proposition 2.1.2 (sous-section 2.4.3).

2.4.1 Des fonctions vectorielles

Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3) et pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ on définit les vecteurs $w_3(B,\theta,x)$, $w_4(B,\theta,x)$ et $w_5(V,\theta,x)$ par

$$\begin{aligned} w_3(B,\theta,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(x+\sigma\theta)\theta d\sigma, && (2.4.1)\\ w_4(B,\theta,x) &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} B(x+\sigma\theta)\theta d\sigma d\tau - \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} B(x+\sigma\theta)\theta d\sigma d\tau, && (2.4.2)\\ w_5(V,\theta,x) &= PV(\theta,x)\theta && (2.4.3)\\ & \quad - \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} \nabla V(x+\sigma\theta) d\sigma d\tau + \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} \nabla V(x+\sigma\theta) d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

On définit $\tilde{w_3}(B) : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\tilde{w_3}(B)(y,x) = |y| w_3(B, \frac{y}{|y|}, x - \frac{xy}{|y|^2} y), \tag{2.4.4}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. De (2.4.4), (2.4.1), on a

$$\tilde{w_3}(B)(y,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x+\sigma y) y d\sigma, \tag{2.4.5}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. De (2.1.3), on déduit $\tilde{w_3}(B) = ((\tilde{w_3}(B))_1, .., (\tilde{w_3}(B))_n) \in C^1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

On définit $\tilde{w_4}(B) : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $\tilde{w_4}(B)(y,x) = |y| w_4(B, \frac{y}{|y|}, x - \frac{x.y}{|y|^2} y)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. De (2.1.3) et (2.4.2), on déduit que

$$\tilde{w_4}(B)(y,x) = \int_{-\infty}^{\frac{-xy}{|y|^2}} \int_{-\infty}^{\tau} B(x+\sigma y) y d\sigma d\tau - \int_{\frac{-xy}{|y|^2}}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} B(x+\sigma y) y d\sigma d\tau, \tag{2.4.6}$$

et $\tilde{w_4}(B) = (\tilde{w_4}(B)_1, .., \tilde{w_4}(B)_n) \in C^1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

2.4.2 Preuve de la Proposition 2.1.1

Pour démontrer la Proposition 2.1.1, nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *Soit $B \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ vérifiant (2.1.3). Alors $w_3(B,\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique le champ B, et on a*

$$PB_{i,k}(\theta,x) = \theta_k w_3(B,\theta,x)_i - \theta_i w_3(B,\theta,x)_k \tag{2.4.7}$$

pour tout $(\theta,x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, $i,k = 1..n$, $i \neq k$ où $\mathcal{V}_{i,k}$ est la sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par (2.1.15) ; de plus si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$PB_{i,k}(\theta,x) = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{w_3}(B))_i(y,x) - \frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{w_3}(B))_k(y,x)\right)_{|y=\theta}, \tag{2.4.8}$$

pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $i,k = 1..n$, $i \neq k$.

La question de la détermination de B à partir de w_3 a été étudiée sous des conditions différentes de B dans [Nic97], [Jun97], [Ito95]. Cependant, à notre connaissance, les formules (2.4.7)-(2.4.8) ne sont pas données dans la littérature.

Preuve de la Proposition 2.4.1. Commençons par démontrer (2.4.7). On rappelle que $w_3(B,\theta,x)_i = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}(t\theta + x)\theta_j dt$, pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $i,k = 1..n$, $i \neq k$. Ainsi $\theta_k PB_{i,k}(\theta,x) = w_3(B,\theta,x)_i$ pour tout $(\theta,x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, $i,k = 1..n$, $i \neq k$. Cette dernière égalité implique (2.4.7) ($\theta_i^2 + \theta_k^2 = 1$ pour tout $(\theta,x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$).

Démontrons maintenant (2.4.8). Sous les conditions (2.1.3) et de (2.4.5) on déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{w_3}(B))_i(y,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(ty+x)dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{\partial B_{i,j}}{\partial x_k}(ty+x)y_j dt\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

pour tous $(y,x) \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n$ et $i,k = 1..n$. Soient $i,k = 1..n$. Comme $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}B_{j,k}(x) + \frac{\partial}{\partial x_k}B_{i,j}(x) + \frac{\partial}{\partial x_j}B_{k,i}(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi en utilisant aussi (2.4.9), on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{w_3}(B))_i(y,x) - \frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{w_3}(B))_k(y,x)\right)_{|y=\theta} \\ &= 2PB_{i,k}(\theta,x) + \int_{-\infty}^{+\infty} t\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}B_{i,k}(t\theta+x)\theta_j dt,\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ où P désigne la transformée de rayons X. En intégrant par partie l'intégrale du côté droit de (2.4.10), on obtient les formules (2.4.8).

Finalement en utilisant les formules d'inversion de la transformée de rayons X (voir par exemple la formule (A.3.10) de la section A.3 de l'annexe) et en utilisant (2.4.7) (ou (2.4.8) et (2.4.4) si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$), on obtient que $w_3(B,\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique le champ B.

La Proposition 2.4.1 est démontrée. □

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer le Proposition 2.1.1.

Soit $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. On remarque que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau(-\theta)+x)(-\theta)d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau\theta+x)\theta d\tau \tag{2.4.11}$$

et on rappelle que

$$P(\nabla V)(-\theta, x) = P(\nabla V)(\theta, x). \qquad (2.4.12)$$

De (2.1.12), (2.4.1) et (2.4.11)-(2.4.12), on obtient la formule (2.1.16) et la formule suivante

$$w_3(B, \theta, x) = \frac{1}{2}(w_1(V, B, \theta, x) - w_1(V, B, -\theta, x)), \qquad (2.4.13)$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. De (2.1.16) et de résultats sur la transformée de rayons X (voir Section A.3 de l'Appendice), on obtient que $w_1(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique ∇V et donc V (V vérifie (2.1.2)). De (2.4.13) et de la Proposition 2.4.1, on obtient aussi que $w_1(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique B. De plus de (2.4.13) on a

$$\tilde{w_3}(B)(y, x) = \frac{1}{2}(\tilde{w_1}(V, B)(y, x) - \tilde{w_1}(V, B)(-y, x)),$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant cette dernière formule et (2.4.8) de la Proposition 2.4.1, on obtient (2.1.18) si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$. En utilisant (2.4.13) et (2.4.7), on a (2.1.17).

La Proposition 2.1.1 est démontrée. □

Pour conclure cette section, on rappelle le procédé suivant qui est basé sur la formule (2.1.17) et qui permet de reconstruire $B_{i,k}$ à partir de $w_1(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, où les indices $i, k = 1..n$, $i \neq k$, sont fixés ($\mathcal{V}_{i,k}$ est défini par (2.1.15)). Soient $i, k = 1 \dots n$, $i \neq k$. La formule (2.1.17) donne l'intégrale de $B_{i,k}$ sur toute droite du plan affine Y d'espace vectoriel tangent $Y_{i,k} = \{(x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n | x'_j = 0, j \neq i, j \neq k\}$. Maintenant, pour reconstruire $B_{i,k}$ en un point $x' \in \mathbb{R}^n$, on considère dans $\mathbb{R}^n$ le plan Y contenant x' et dont l'espace vectoriel tangent est $Y_{i,k}$. On interprète $T\mathbb{S}^{n-1}$ comme l'ensemble de tous les rayons de $\mathbb{R}^n$ et on considère dans $T\mathbb{S}^{n-1}$ le sous-ensemble $T\mathbb{S}^1(Y)$ constitué de tous les rayons reposant sur Y. On restreint alors $PB_{i,k}$ à $T\mathbb{S}^1(Y)$ et on reconstruit $B_{i,k}(x')$ à partir de ces données en utilisant les méthodes de reconstruction de f à partir de Pf pour $n = 2$ (voir, par exemple, la formule (A.3.10) de la Section A.3). (Si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, on peut aussi utiliser la formule (2.1.18) pour reconstruire $B_{i,k}$ à partir de $w_1(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.)

2.4.3 Preuve de la Proposition 2.1.2

Avant de démontrer la Proposition 2.1.2, on démontre tout d'abord les Propositions 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4 données ci-dessous. La Proposition 2.4.2 est en fait exactement la proposition 1.1 de [Jol05a].

Proposition 2.4.2. *Le vecteur w_5, défini par* (2.4.3)*, vu comme fonction du potentiel V vérifiant* (2.1.2) *et de $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ a les propriétés simples suivantes :*

1. *sous les conditions* (2.1.2)*, pour tout potentiel V le vecteur $w_5(V,\theta,x)$ est orthogonal à θ ;*
2. *il existe un potentiel V qui satisfait* (2.1.2) *et pour lequel $w_5(V,\theta,x)$ n'est pas nulle pour tout $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$;*
3. *pour tout potentiel radial V satisfaisant* (2.1.2)*, on a $w_5(V,\theta,x)=0$ pour tout $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$.*

Remarque 2.4.1. F. Nicoleau nous a fait remarqué que pour V satisfaisant (2.1.2), si $w(V,\theta,x)=0$ pour tout $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$ alors V est radial (voir Proposition A.4.1 de la sous-section A.4.2 de l'annexe).

Preuve de la Proposition 2.4.2. Le premier item vient immédiatement de l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t\theta+x)=\nabla V(t\theta+x)\circ\theta,\quad \text{pour tout } (\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1},\ t\in\mathbb{R}.$$

On démontre le deuxième item. Considérons

$$V(x)=\frac{x_1}{(1+|x|^2)^{\beta}},\ \text{pour tout } x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\beta>1.$$

Soit $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$. En utilisant (2.4.3) et en utilisant que $\theta\circ x=0$, on obtient par calcul direct

$$\begin{aligned} w_5(V,\theta,x) &= -4\beta\theta_1|x|^2\int_0^{+\infty}\int_\tau^{+\infty}\frac{s}{(1+s^2+|x|^2)^{\beta+1}}dsd\tau\\ &\neq 0 \text{ si et seulement si } x\neq 0 \text{ et } \theta_1\neq 0,\end{aligned}$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

On démontre le troisième item. Soit V un potentiel radial (i.e. V prend la forme $m(|x|)$) satisfaisant (2.1.2) (e.g. $V(x)=(1+|x|^2)^{-\beta}$ où $\beta>\frac{1}{2}$). Alors $m\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\nabla V(x)=m'(|x|)\frac{x}{|x|}$. Soit $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$ et soit $\theta^\perp$ un vecteur orthogonal à θ. Un calcul direct donne

$$-\nabla V(s\theta+x)\circ\theta^\perp=m'(\sqrt{s^2+|x|^2})\frac{x\circ\theta^\perp}{\sqrt{s^2+|x|^2}}$$

pour tout $s\in\mathbb{R}$. Ainsi en utilisant aussi (2.4.3), on obtient

$$w_5(V,\theta,x)\circ\theta^\perp=0. \tag{2.4.14}$$

Le troisième item est alors conséquence du premier item et de la formule (2.4.14).

La Proposition 2.4.2 est démontrée. $\square$

Proposition 2.4.3. *Sous les conditions* (2.1.3)*, et si* $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ *alors :*

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \left[\theta_k PB_{i,j}(\theta,x) - \theta_i PB_{k,j}(\theta,x)\right] - PB_{i,k}(\theta,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{w}_4(B)_k(\theta,x) - \frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_i(\theta,x), \tag{2.4.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \left[\theta_k PB_{i,j,l}(\theta,x) - \theta_i PB_{k,j,l}(\theta,x)\right] - PB_{i,k,l}(\theta,x) = \tilde{w}_4(B)_{i,k,l}(\theta,x), \tag{2.4.16}$$

pour tous $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $i,k,l = 1\ldots n$, *où* P *désigne la transformée de rayons X et où* $\tilde{w}_4(B)_{m,r,l}(\theta,x) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\tilde{w}_4(B)_r - \frac{\partial}{\partial x_r}\tilde{w}_4(B)_m\right)(\theta,x)$, $B_{m,r,l}(x) = \frac{\partial}{\partial x_l}B_{m,r}(x)$, *pour tous* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m,r = 1\ldots n$ *(on rappelle que* $\tilde{w}_4(B)$ *est défini par* (2.4.6)*).*

Remarque 2.4.2. Soient $n = 3$, $l = 1\ldots n$. La formule (2.4.16) donne en fait

$$\theta \circ (-PB_{2,3,l}(\theta,x), PB_{1,3,l}(\theta,x), -PB_{1,2,l}(\theta,x)) = \theta \circ (\tilde{w}_4(B)_{2,3,l}(\theta,x), -\tilde{w}_4(B)_{1,3,l}(\theta,x), \tilde{w}_4(B)_{1,2,l}(\theta,x)), \tag{2.4.17}$$

pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^2$, où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$.

Preuve de la Proposition 2.4.3. Sous les conditions (2.1.3), de (2.4.6) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_i(y,x) &= -\frac{y_k}{|y|^2}\sum_{j=1}^{n} y_j \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}(\sigma y + x)d\sigma d\tau \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} y_j \left\{ \int_{-\infty}^{-\frac{x\circ y}{|y|^2}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_k} B_{i,j}(\sigma y + x)d\sigma d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\frac{x\circ y}{|y|^2}}^{+\infty} \int_{\tau}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} B_{i,j}(\sigma y + x)d\sigma d\tau \right\} \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

pour tous $(y,x) \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n$ et $i,k = 1\ldots n$. Soient $i,k,l = 1\ldots n$. De (2.4.18), il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_i(\theta,x) - \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{w}_4(B)_k(\theta,x) \\ &= -\theta_k \sum_{j=1}^{n} \theta_j \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}(\sigma\theta + x)d\sigma d\tau + \theta_i \sum_{j=1}^{n} \theta_j \int_{-\infty}^{+\infty} B_{k,j}(\sigma\theta + x)d\sigma d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \theta_j \left\{ \int_{-\infty}^{-x\circ\theta} \int_{-\infty}^{\tau} [\frac{\partial}{\partial x_k}B_{i,j}(\sigma\theta + x) - \frac{\partial}{\partial x_i}B_{k,j}(\sigma\theta + x)]d\sigma d\tau \right. \\ &\left. - \int_{-x\circ\theta}^{+\infty} \int_{\tau}^{+\infty} [\frac{\partial}{\partial x_k}B_{i,j}(\sigma\theta + x) - \frac{\partial}{\partial x_i}B_{k,j}(\sigma\theta + x)]d\sigma d\tau \right\} \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^n,\ \theta \in \mathbb{S}^{n-1},\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Comme $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k} B_{i,j}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} B_{k,j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} B_{i,k}(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ j = 1 \ldots n. \tag{2.4.20}$$

Soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. En utilisant (2.4.19), (2.1.3) et (2.4.20), on obtient (2.4.15). Sous les conditions (2.1.3), la fonction $h_{i,k,\theta}$ définie par $h_{i,k,\theta}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{w}_4(B)_i(\theta, x)$ $-\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{w}_4(B)_k(\theta, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, vérifie $h_{i,k,\theta} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et (2.4.16) est conséquence immédiate de (2.4.15).

La Proposition 2.4.3 est démontrée. □

Proposition 2.4.4. *Soit $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant* (2.1.3)*. Si $n = 2$ alors $w_4(B, \theta, x)$ (défini par* (2.4.2)*) donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ ne détermine pas de manière unique le champ magnétique B.*

Si $n \geq 3$ alors $w_4(B, \theta, x)$ (défini par (2.4.2)*) donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique le champ magnétique B. De plus on a les égalités suivantes : si $n = 3$ alors*

$$\begin{aligned} &(-\mathcal{F}B_{2,3,l}(p), \mathcal{F}B_{1,3,l}(p), -\mathcal{F}B_{1,2,l}(p)) = \\ &(2\pi)^{-3/2} \sum_{j=1}^{2} \Bigg[\theta_p^j \circ \Bigg(\int_{\Pi_{\theta_p^j}} e^{-iy\circ p} \tilde{w}_4(B)_{2,3,l}(\theta_p^j, y) dy, \\ &- \int_{\Pi_{\theta_p^j}} e^{-iy\circ p} \tilde{w}_4(B)_{1,3,l}(\theta_p^j, y) dy, \int_{\Pi_{\theta_p^j}} e^{-iy\circ p} \tilde{w}_4(B)_{1,2,l}(\theta_p^j, y) dy \Bigg) \Bigg] \theta_p^j, \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ et pour toute famille orthonormale $\{\theta_p^1, \theta_p^2\}$ du plan Π_p, où $\Pi_{p'}$ désigne le plan vectoriel $\{y \in \mathbb{R}^3 | y \circ p' = 0\}$ pour tout $p' \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, et $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier classique sur $L^1(\mathbb{R}^3)$ ($i = \sqrt{-1}$ et $\tilde{w}_4(B)$ est définie par (2.4.6)*);*

si $n \geq 4$ alors

$$PB_{j,k}(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{w}_4(B)_j(\theta, x) - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{w}_4(B)_k(\theta, x) \tag{2.4.22}$$

pour tout $(\theta, x) \in \tilde{\mathcal{V}}_{j,k}$, où $\tilde{\mathcal{V}}_{j,k}$ est la sous-variété de dimension $(2n-4)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par $\tilde{\mathcal{V}}_{j,k} = \{(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1} | \theta = (\theta_1, ..., \theta_n), \theta_j = \theta_k = 0\}$ ($\tilde{w}_4(B)$ est définie par (2.4.6)*).*

Remarque 2.4.3. F. Nicoleau nous a fait remarqué que si $n = 2$ et si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ satisfait (2.1.3) et vérifie $w_4(B, \theta, x) = 0$ pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ alors B est radial (voir Proposition A.4.2 de la sous-section A.4.3 de l'annexe).

Preuve de Proposition 2.4.4. Considérons d'abord le cas $n = 2$. Soit $\xi \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et soit

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \xi(|x|^2) \\ -\xi(|x|^2) & 0 \end{pmatrix} \not\equiv 0$$

tels que B satisfasse (2.1.3) (e.g. $\xi(t) = \frac{1}{(1+t)^\sigma}, t \in \mathbb{R}^+,\ \sigma > 1$ ou $\xi(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}^+$). On définit $w_6(B,\theta,x) = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\tau} \xi(|\sigma\theta+x|^2) d\sigma d\tau - \int_0^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} \xi(|\sigma\theta + x|^2) d\sigma d\tau$, pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. Soit $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. En utilisant $|\sigma\theta + x|^2 = \sigma^2 + |x|^2$, on obtient $w_6(B,\theta,x) = 0$. De cette égalité et de (2.4.2) on obtient $w_4(B,\theta,x) = w_6(B,\theta,x)(\theta_2, -\theta_1) = 0$ ($\theta = (\theta_1,\theta_2)$).

Supposons désormais $n \geq 3$. On distinguera le cas $n = 3$ du cas $n \geq 4$. Considérons tout d'abord le cas $n \geq 4$. Soient $j,k = 1\ldots n$, $j \neq k$. L'égalité (2.4.15) implique (2.4.22). Soit $x' \in \mathbb{R}^n$. Comme $n \geq 4$, la dimension de l'espace vectoriel $H_{j,k} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n | x_j = x_k = 0\}$ est plus grande ou égale à 2. Soit $\{e_1, e_2\}$ une famille orthonormale de $H_{j,k}$. Soit Y le plan affine de $\mathbb{R}^n$ qui passe par x' et dont l'espace vectoriel tangent est engendré par $\{e_1,e_2\}$. De (2.4.22), on déduit que l'intégrale de $B_{j,k}$ sur toute droite de Y est connue à partir $\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_j(\theta,x) - \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{w}_4(B)_k(\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in \tilde{\mathcal{V}}_{j,k}$. Ainsi en utilisant des résultats sur l'inversion de la transformée de rayons X, P, (voir (A.3.10) de la Section A.4 de l'Appendice), on obtient que $B_{j,k|Y}$ peut être reconstruit à partir de $\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_j(\theta,x) - \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{w}_4(B)_k(\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in \tilde{\mathcal{V}}_{j,k}$ (où $B_{j,k|Y}$ désigne la restriction de $B_{j,k}$ à Y). Ainsi $B_{j,k}(x')$ peut être reconstruit à partir de $\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{w}_4(B)_j(\theta,x) - \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{w}_4(B)_k(\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in \tilde{\mathcal{V}}_{j,k}$.

Maintenant on considère le cas $n = 3$. Soit $l = 1\ldots 3$. Sous les conditions (2.1.3), $B_{j,k,l} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ pour tous $j,k = 1\ldots 3$. Soit $p \in \mathbb{R}^3$. À partir de (2.4.17), on obtient

$$\begin{aligned}\theta \circ (-\mathcal{F}B_{2,3,l}(p), \mathcal{F}B_{1,3,l}(p), -\mathcal{F}B_{1,2,l}(p)) = \\ (2\pi)^{-3/2}\theta \circ \Bigg(\int_{\Pi_\theta} e^{-iy\circ p}\tilde{w}_4(B)_{2,3,l}(\theta,y)dy, \quad -\int_{\Pi_\theta} e^{-iy\circ p}\tilde{w}_4(B)_{1,3,l}(\theta,y)dy, \\ \int_{\Pi_\theta} e^{-iy\circ p}\tilde{w}_4(B)_{1,2,l}(\theta,y)dy \Bigg)\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{S}^2$ tel que $\theta \circ p = 0$. Pour démontrer que (2.4.23) implique (2.4.21), on aura besoin du Lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Sous les conditions* (2.1.3), $(-\mathcal{F}B_{2,3,l}(p), \mathcal{F}B_{1,3,l}(p), -\mathcal{F}B_{1,2,l}(p)) \circ p = 0$, *pour tout* $p \in \mathbb{R}^3$.

Le Lemme 2.4.1 et (2.4.23) implique (2.4.21).

Soient $m,r = 1,2,3$ $m \neq r$. En utilisant l'injectivité de la transformée de Fourier et en utilisant (2.4.21), on obtient que $B_{m,r,l}$ est déterminé de manière unique par $w_4(B,\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. Comme $B_{m,r}$ s'annule à l'infini, on déduit que $B_{m,r}$ est déterminé de manière unique par $w_4(B,\theta,x)$ donné pour tout $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

La Proposition 2.4.4 est démontrée. □

Preuve du Lemme 2.4.1. On définit $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\lambda(p) = (-\mathcal{F}B_{2,3,l}(p), \mathcal{F}B_{1,3,l}(p), -\mathcal{F}B_{1,2,l}(p)) \circ p,\ p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3. \tag{2.4.24}$$

À partir de maintenant $\mathcal{F}$ désignera la transformée de Fourier des distributions tempérées. Considérons la jauge transverse $\mathbf{A}$ de B définie par

$$\mathbf{A}(x) = -\int_0^1 sB(sx)xds \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

On note $\mathbf{A}(x) = (\mathbf{A}_1(x), \ldots, \mathbf{A}_n(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sous les conditions (2.1.3) et par définition de $\mathbf{A}$, on a

$$B_{i,k}(x) = \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_k}(x), \tag{2.4.25}$$

$$|\mathbf{A}_i(x)| \leq \beta(1 + |x|)^{-1}, \tag{2.4.26}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tous $i, k = 1 \ldots n$, où β est une constante réelle positive. De (2.4.26), on déduit que $\mathbf{A}_i$ définit une distribution tempérée de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ pour tout $i = 1 \ldots n$. De (2.4.25) et (2.4.24) on déduit

$$\begin{aligned} < \lambda(p), \phi > &= < p_1p_lp_2\mathcal{F}\mathbf{A}_3 - p_1p_lp_3\mathcal{F}\mathbf{A}_2 - p_2p_lp_1\mathcal{F}\mathbf{A}_3 \\ &\quad + p_2p_lp_3\mathcal{F}\mathbf{A}_1 + p_3p_lp_1\mathcal{F}\mathbf{A}_2 - p_3p_lp_2\mathcal{F}\mathbf{A}_1, \phi > \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Comme $B_{m,r,l} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F}B_{m,r,l}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$ pour tous $m, r = 1, 2, 3$. Ainsi λ est continu sur $\mathbb{R}^3$. De la continuité de λ et de (2.4.27), on obtient que $\lambda \equiv 0$.

Le Lemme 2.4.1 est démontré. □

Finalement nous sommes prêts pour démontrer la Proposition 2.1.2. On commence par démontrer le troisième item de la Proposition 2.1.2. Soit $n \geq 3$ et soient j, k, l trois entiers compris entre 1 et n et distincts deux à deux. Soit $\beta > \frac{\alpha+2}{2}$. On pose $h(y) = (1 + |y|^2)^\beta$ et on considère le champ $B' = (B'_{i_1,i_2}) \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions (2.1.3) et défini par

$$B'_{j,k}(y) = \frac{y_l}{h(|y|)},\ B'_{k,l}(y) = \frac{y_j}{h(|y|)},\ B'_{j,l}(y) = -\frac{y_k}{h(|y|)}, \tag{2.4.28}$$

et $B'_{i_1,i_2}(y) = 0$ si $i_1 \notin \{j, k, l\}$, pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$w_4(B', \theta, x) \equiv 0, \text{ pour tout } (\theta, x) \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{2.4.29}$$

(voir début de la preuve de la Proposition A.4.2 donnée dans la sous-section A.4.3 de l'annexe pour plus de détails). Le troisième item de la Proposition 2.1.2 est démontré.

On remarque que

$$w_4(B,\theta,x) = \frac{1}{2}(w_2(V,B,\theta,x)+w_2(V,B,-\theta,x)), \tag{2.4.30}$$

$$w_5(V,\theta,x) = \frac{1}{2}(w_2(V,B,\theta,x)-w_2(V,B,-\theta,x)), \tag{2.4.31}$$

pour tout $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$ (où w_4 et w_5 sont définis par (2.4.2), (2.4.3)).

Les items (i), (ii) et (iv) de la Proposition 2.1.2 se déduisent alors des égalités (2.4.30)-(2.4.31), et des Propositions 2.4.2, 2.4.4. □

2.5 Préliminaires pour les preuves principales

2.5.1 Estimations de la force F et de la fonction g.

On rappelle les estimations vérifiées par F sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3), et déjà présentées au premier chapitre (voir (1.2.16), (1.2.19)) :

$$|F(x,v)| \le \beta_1 n(1+|x|)^{-(\alpha+1)}(1+\frac{1}{c}|v|), \tag{2.5.1}$$

$$|F(x,v)-F(x',v')| \le n\beta_1\frac{1}{c}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}(1+|(1-\varepsilon)x+\varepsilon x'|)^{-(\alpha+1)}|v'-v| \tag{2.5.2}$$

$$+n^{3/2}\beta_2\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\left[(1+|(1-\varepsilon)x+\varepsilon x'|)^{-(\alpha+2)}(1+\frac{1}{c}|(1-\varepsilon)v+\varepsilon v'|)\right]|x'-x|,$$

pour tous $x,v,x',v'\in\mathbb{R}^n$ et tous $i,k=1\ldots n$, où F est définie par (1.2.1).

On rappelle que la fonction $g:\mathbb{R}^n\to B_c$ définie au premier chapitre (voir (1.2.8)) par

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\frac{|x|^2}{c^2}}},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur B_c, et son inverse est la fonction de classe C^∞, $g^{-1}:B_c\to\mathbb{R}^n$, donnée par

$$g^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-\frac{|x|^2}{c^2}}},\ x\in B_c\ ;$$

la fonction g vérifie aussi les inégalités suivantes (voir Lemme 1.2.1) :

$$|\nabla g_i(x)|^2 \le \frac{1}{1+\frac{|x|^2}{c^2}}, \tag{2.5.3}$$

$$|g(x)-g(y)| \le \sqrt{n}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}}|x-y|, \tag{2.5.4}$$

$$|\nabla g_i(x)-\nabla g_i(y)| \le \frac{3\sqrt{n}}{c}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}|x-y|, \tag{2.5.5}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $i = 1 \dots n$, où $g = (g_1, \dots, g_n)$.

2.5.2 Estimations d'intégrales

Nous utiliserons les estimations suivantes. Pour tous $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 1$,

$$\int_{-\infty}^{t} (a + b|s|)^{-\beta}\, ds = \frac{1}{(\beta - 1)b(a - bt)^{\beta-1}}, \text{ pour tout } t \leq 0, \tag{2.5.6}$$

$$\int_{-\infty}^{t} (a + b|s|)^{-\beta}\, ds \leq \frac{2}{(\beta - 1)ba^{\beta-1}}, \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.5.7}$$

Pour tous $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 2$,

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} (a + b|s|)^{-\beta}\, ds\, d\tau = \frac{1}{(\beta - 2)(\beta - 1)b^2(a - bt)^{\beta-2}}, \text{ pour tout } t \leq 0, \tag{2.5.8}$$

$$\int_{0}^{t}\int_{\tau}^{t} (a + bs)^{-\beta}\, ds\, d\tau \leq \frac{1}{(\beta - 2)(\beta - 1)b^2a^{\beta-2}}, \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.5.9}$$

Pour tous $a \geq 1$, $b > 0$, $\beta > 2$,

$$\int_{-\infty}^{t} (a + b|s|)^{-\beta}(1 + |s|)\, ds \leq \frac{b + 1}{(\beta - 2)b^2(a - bt)^{\beta-2}}, \text{ pour tout } t \leq 0, \tag{2.5.10}$$

$$\int_{-\infty}^{t} (a + b|s|)^{-\beta}(1 + |s|)\, ds \leq 2\frac{b + 1}{(\beta - 2)b^2a^{\beta-2}}, \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.5.11}$$

Pour tous $a \geq 1$, $b > 0$, $\beta > 3$,

$$\int_{0}^{t}\int_{\tau}^{t} (a + bs)^{-\beta}(1 + s)\, ds\, d\tau \leq \frac{b + 1}{(\beta - 3)(\beta - 2)b^3a^{\beta-3}}, \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.5.12}$$

La preuve de ces estimations ne présente pas de difficultés.

2.5.3 À propos de $z_1(c, n, \beta_1, \alpha, |x_-|, r)$

Supposons c, n, β_1, α, $|x_-|$, r fixés (avec $0 < r \leq 1$, $r < c/\sqrt{2}$). Considérons la fonction d'une variable réelle $\sigma :]\sqrt{2}r, c[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞

et définie par

$$\sigma(s) = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} - \frac{2^{\alpha+4}\beta_1 n(2+r/c)}{\alpha(s/\sqrt{2}-r)(|x_-|/\sqrt{2}+1)^\alpha}.$$

La fonction σ est une fonction strictement croissante (sa dérivée est une fonction strictement positive), d'où l'on a à la fois unicité du réel $z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$ défini dans la section 2.2 (par (2.2.8)) et l'observation (I) de la section 2.3.

2.5.4 À propos de $M_{T,r}$, $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$

Lemme 2.5.1. *Soient (f,h), (f_1,h_1), $(f_2,h_2) \in M_{T,r}$, $v_- \in B_c \backslash \{0\}$, $x_- \in \mathbb{R}^n$ tels que $v_- \circ x_- = 0$, $|v_-| > \sqrt{2}r$. Alors*

$$\varepsilon(f_1,h_1) + (1-\varepsilon)(f_2,h_2) \in M_{T,r}, \text{ pour tout } 0 \le \varepsilon \le 1, \tag{2.5.13}$$

$$2(1+|x_- + v_- s + f(s)|) \ge (1+|x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2}-r)|s|), \text{ pour tout } s \le T, \tag{2.5.14}$$

$$\left|\int_{-\infty}^t F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds\right| \le \frac{\beta_1 n 2^{\alpha+2}(2+r/c)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2}-r)(|x_-|/\sqrt{2}+1)^\alpha}, \tag{2.5.15}$$

$$\left(1+\frac{1}{c^2}\left|g^{-1}(v_-) + \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{t} F(v_- s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds + \varepsilon_2 \int_{w}^{u} F(v_- s\right.\right.$$
$$\left.\left. + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds\right|^2\right)^{-\beta} \le (1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)})^{-\beta}, \tag{2.5.16}$$

pour tous $u,t \in]-\infty,T]$, $w \in [-\infty,u]$, $\beta > 0$, $-1 \le \varepsilon_1,\varepsilon_2 \le 1$, $(f_1,h_1),(f_2,h_2) \in M_{T,r}$ et si $|v_-| \ge z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$, $|v_-| < c$.

Preuve du Lemme 2.5.1. Compte tenu de la définition de $M_{T,r}$, (2.5.13) est immédiat. L'estimation (2.5.14) se déduit des estimations

$$\begin{aligned} 2(1+|x_- + v_- s + f(s)|) &\ge 2 + |x_- + v_- s + f(s)| \ge 2 + |x_- + v_- s| - |f(s)|, \\ |x_- + v_- s| &\ge |x_-|/\sqrt{2} + |s||v_-|/\sqrt{2}, \text{ car } v_- \circ x_- = 0, \\ |f(s)| &\le |f(s) - sh(s)| + |s||h(s)| \le (1+|s|)\|(f,h)\|_T \\ &\le r(1+|s|) \le 1 + r|s|, \end{aligned}$$

pour tous $x_- \in \mathbb{R}^n$, $v_- \in B_c$, avec $v_- \circ x_- = 0$, et pour tous $(f,h) \in M_{T,r}$, $s \le T$. L'estimation (2.5.1) avec (2.5.14) et (2.5.7) et $|v_-| \le c$ donne (2.5.15).

L'estimation (2.5.15) donne, en particulier, pour tous $u, t \in]-\infty, T]$, $w \in [-\infty, u]$, $-1 \le \varepsilon_1, \varepsilon_2 \le 1$, $(f_1, h_1), (f_2, h_2) \in M_{T,r}$

$$\begin{aligned}
& |g^{-1}(v_-) + \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{t} F(v_- s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds \\
& + \varepsilon_2 \int_{w}^{u} F(v_- s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds| \\
\ge\; & |g^{-1}(v_-)| - \frac{\beta_1 n 2^{\alpha+3}(2 + r/c)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2} - r)(|x_-|/\sqrt{2} + 1)^\alpha} \\
=\; & \frac{|v_-|}{\sqrt{1 - |v_-|^2/c^2}} - \frac{\beta_1 n 2^{\alpha+3}(2 + r/c)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2} - r)(|x_-|/\sqrt{2} + 1)^\alpha} \\
\ge\; & \frac{c|v_-|}{2\sqrt{c^2 - |v_-|^2}}, \text{ si } |v_-| \ge z_1(c, n, \beta_1, \alpha, |x_-|, r),\ |v_-| < c,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'estimation (2.5.16). □

2.6 Preuve des Lemmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3

2.6.1 Preuve du Lemme 2.2.1

La propriété

$$A_{v_-,x_-}(f, h) \in C(]-\infty, T], \mathbb{R}^n)^2 \text{ pour tout } (f, h) \in M_{T,r} \tag{2.6.1}$$

($0 < r \le 1$, $r < |v_-|/\sqrt{2}$) se déduit de (2.1.2)-(2.1.3), (2.2.1) (appliqué à « x »$= g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds$ et « y »$= g^{-1}(v_-)$) et de la définition de A_{v_-,x_-} donnée au début de la section 2.2.

Désormais on fixe un réel r et on fixe $v_- \in B_c$, $x_- \in \mathbb{R}^n$ tels que $0 < r \le 1$, $r < c/\sqrt{2}$, $|v_-| \ge z_1(c, n, \beta_1, \alpha, |x_-|, r)$, $v_- \circ x_- = 0$. Considérons

$$\begin{aligned}
A^1_{v_-,x_-}(f, h)(t) &= \int_{-\infty}^{t} \left[g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds) - v_- \right] d\tau, \\
A^2_{v_-,x_-}(f, h)(t) &= g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds) - v_-,
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

pour tout $(f, h) \in M_{T,r}$. Tout d'abord donnons une estimation de $A^2_{v_-,x_-}(f, h)$.

Remarquons que $g(g^{-1}(v_-)) = v_-$. De (2.6.2), (2.5.4) (appliqué à « x »$= g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_- s + x_- + f(s), v_- + h(s))ds$ et « y »$= g^{-1}(v_-)$), (2.5.1), (2.5.14) et de (2.5.16) on a

$$|A^2_{v_-,x_-}(f, h)(t)| \le \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2 + r/c)}{\sqrt{1 + \frac{|v_-|^2}{4(c^2 - |v_-|^2)}}} \int_{-\infty}^{t} (1 + |x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2} - r)|s|))^{-(\alpha+1)} ds. \tag{2.6.3}$$

L'inégalité (2.6.3) combinée avec (2.5.6) donne une estimation de $A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)$ pour $t \leq 0$. L'inégalité (2.6.3) combinée avec (2.5.7) donne une estimation de $A^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)$ pour $t \leq T$.

Maintenant nous allons estimer $A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) - tA^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)$.

De (2.6.3), (2.5.8) et (2.5.6), on a

$$|A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t)| \leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}}-(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)t)^{\alpha-1}}, \tag{2.6.4}$$

$$|tA^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)| \leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)\alpha^{-1}(|v_-|/\sqrt{2}-r)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}(1+|x_-|/\sqrt{2}-(|v_-|/\sqrt{2}-r)t)^{\alpha-1}} \tag{2.6.5}$$

pour tout $t \leq T,\ t \leq 0$. De (2.6.4)-(2.6.5), on déduit

$$\begin{aligned}&|A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) - tA^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)|\\ &\leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}(\alpha-1)(1+|x_-|/\sqrt{2}-(|v_-|/\sqrt{2}-r)t)^{\alpha-1}},\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

pour tout $t \leq T$, $t \leq 0$.

Pour tout $t \leq T$, $t \geq 0$, on remarque que

$$\begin{aligned}&A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) - tA^2_{v_-,x_-}(f,h)(t) =\\ &A^1_{v_-,x_-}(f,h)(0) + \int_0^t \Big[g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f(s),\\ &v_-+h(s))ds) - g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f(s), v_-+h(s))ds)\Big]\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

Pour estimer $A^1_{v_-,x_-}(f,h)(0)$ on utilise l'estimation (2.6.4), i.e.

$$|A^1_{v_-,x_-}(f,h)(0)| \leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+\frac{r}{c})}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{(4(c^2-|v_-|^2))}}\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^2(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha-1}}. \tag{2.6.8}$$

On estime le second terme de droite de (2.6.7) de la manière suivante : de

(2.5.4), (2.5.16), (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.9), on a

$$\Bigg|\int_0^t \Bigg[g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)$$

$$-g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\Bigg]d\tau\Bigg|$$

$$\le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}}\int_0^t\left|\int_t^\tau F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds\right|d\tau$$

$$\le \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+\frac{r}{c})}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha-1}} \tag{2.6.9}$$

pour tout $0\le t\le T$. De (2.6.7)-(2.6.9), on déduit

$$|A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t)-tA^2_{v_-,x_-}(f,h)(t)|$$
$$\le \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+2}(2+r/c)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{(4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha-1}} \tag{2.6.10}$$

pour tout $t\le T$ et $0\le t$. En utilisant (2.6.3) et (2.5.6), et en utilisant (2.6.6), on obtient (2.2.9). En utilisant (2.6.3) et (2.5.7), et en utilisant (2.6.10), on obtient (2.2.10).

Nous allons démontrer l'estimation (2.6.16) donné ci-dessous. Considérons $A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t)$ pour $(f_1,h_1),(f_2,h_2)\in M_{T,r}$ (on rappelle que $0<r\le 1$, $r<c/\sqrt{2}$, $|v_-|<c$, $|v_-|\ge z_1(c,n,\beta_1,\alpha,|x_-|,r)$, $v_-\circ x_-=0$). On a

$$A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t)=$$

$$g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))ds)$$

$$-g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))ds) \tag{2.6.11}$$

pour tout $t\le T$. De (2.6.11), (2.5.4) et (2.5.16), on déduit l'inégalité suivante

$$|A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t)|\le \tag{2.6.12}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{(4(c^2-|v_-|^2))}}}\int_{-\infty}^{t}|F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))$$
$$-F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))|ds,$$

pour tout $t \leq T$. De (2.5.13), (2.5.14) et (2.5.2), on a

$$\begin{aligned}
&|F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s)) - F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))| \\
&\leq n^{3/2}\beta_2 2^{\alpha+2}(2 + r/c)(1 + |x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2} - r)|s|)^{-(\alpha+2)} \quad (2.6.13)\\
&\times|f_2(s) - f_1(s)| + \frac{n\beta_1 2^{\alpha+1}}{c}(1 + |x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2} - r)|s|)^{-(\alpha+1)} \\
&\times|h_2(s) - h_1(s)|,
\end{aligned}$$

pour tout $s \leq T$. De plus

$$\begin{aligned}
|f_2(s) - f_1(s)| &\leq (1 + |s|)\|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T, \qquad (2.6.14)\\
|h_2(s) - h_1(s)\|_T &\leq \|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T, \qquad (2.6.15)
\end{aligned}$$

pour tout $s \leq T$. Ainsi de (2.6.12)-(2.6.15), on obtient

$$\begin{aligned}
&|A^2_{v_-,x_-}(f_2, h_2)(t) - A^2_{v_-,x_-}(f_1, h_1)(t)| \leq \\
&\frac{n^2\beta_2 2^{\alpha+2}(2 + r/c)\|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T}{\sqrt{1 + (|v_-|^2/(4(c^2 - |v_-|^2)))}} \\
&\times\int_{-\infty}^{t}(1 + |x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2} - r)|s|)^{-(\alpha+2)}(1 + |s|)\mathrm{d}s \qquad (2.6.16)\\
&+\frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}\|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T}{c\sqrt{1 + (|v_-|^2/(4(c^2 - |v_-|^2)))}}\int_{-\infty}^{t}(1 + \frac{|x_-|}{\sqrt{2}} + (\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} - r)|s|)^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

pour tout $t \leq T$.

Nous allons démontrer les estimations (2.6.19) et (2.6.34) données ci-dessous. De (2.6.16), (2.5.10) et (2.5.6), on a

$$\begin{aligned}
|A^1_{v_-,x_-}(f_2, h_2)(t) - A^1_{v_-,x_-}(f_1, h_1)(t)| &\leq \frac{n^2\tilde{\beta}}{\sqrt{1 + \frac{|v_-|^2}{(4(c^2 - |v_-|^2))}}} \\
&\times\frac{(1 + \frac{1}{c})2^{\alpha+3}(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} + 1 - r)\|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T}{\alpha(\alpha - 1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} - r)^3(1 + \frac{|x_-|}{\sqrt{2}} - (\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} - r)t)^{\alpha-1}}, \qquad (2.6.17)
\end{aligned}$$

pour tout $t \leq T,\ t \leq 0$, où $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$. De (2.6.16), (2.5.10) et (2.5.6), on a

$$\begin{aligned}
|t||A^2_{v_-,x_-}(f_2, h_2)(t) - A^2_{v_-,x_-}(f_1, h_1)(t)| &\leq \frac{n^2\tilde{\beta}}{\sqrt{1 + (|v_-|^2/(4(c^2 - |v_-|^2)))}} \\
&\times\frac{(1 + \frac{1}{c})2^{\alpha+3}(|v_-|/\sqrt{2} + 1 - r)\|(f_2, h_2) - (f_1, h_1)\|_T}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2} - r)^3(1 + |x_-|/\sqrt{2} - (|v_-|/\sqrt{2} - r)t)^{(\alpha-1)}}, \qquad (2.6.18)
\end{aligned}$$

pour tout $t \leq T,\ t \leq 0$. Ainsi de (2.6.17), (2.6.18), on déduit

$$\begin{aligned}
&|A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t) - A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t) \\
&-t(A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t) - A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t))| \leq \frac{n^2\tilde{\beta}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{(4(c^2-|v_-|^2))}}} \\
&\times \frac{(1+\frac{1}{c})2^{\alpha+3}(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)\|(f_2,h_2)-(f_1,h_1)\|_T}{(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^3(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}}-(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)t)^{(\alpha-1)}}
\end{aligned} \tag{2.6.19}$$

pour tout $t \leq T, t \leq 0$.

Pour $0 \leq t \leq T$, en utilisant (2.6.7) on obtient

$$|A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t) - A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t) - t(A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t) - A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t))|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(0) - A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(0)| \\
&+\left|\int_0^t \left[g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))ds)\right.\right. \\
&-g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))ds) \\
&-g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))ds) \\
&\left.\left.+g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))ds)\right] d\tau\right|.
\end{aligned} \tag{2.6.20}$$

De (2.6.17), on a

$$\begin{aligned}
&|A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(0) - A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(0)| \\
&\leq \frac{n^2\tilde{\beta}(1+\frac{1}{c})2^{\alpha+3}(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)\|(f_2,h_2)-(f_1,h_1)\|_T}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{(4(c^2-|v_-|^2))}}\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^3(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha-1}}.
\end{aligned} \tag{2.6.21}$$

Afin d'estimer le second terme de droite de (2.6.20), on estimera

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[g_j(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))ds)\right. \\
&-g_j(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))ds)
\end{aligned}$$

$$-g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds) \tag{2.6.22}$$

$$\left. +g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds)\right] d\tau$$

pour tous $1 \leq j \leq n$ et $0 \leq t \leq T$.

Soient $1 \leq j \leq n$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq t$. Remarquons que

$$g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds)$$

$$-g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds)$$

$$-(g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds)$$

$$-g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds))$$

$$= \Delta^1_{j,t}(\tau) + \Delta^2_{j,t}(\tau) \tag{2.6.23}$$

où

$$\Delta^1_{j,t}(\tau) = \int_t^\tau (F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s)) - F(v_-s + x_- \tag{2.6.24}$$

$$+f_1(s), v_- + h_1(s)))ds \circ \int_0^1 \nabla g_j \left(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_2(s), \right.$$

$$\left. v_- + h_2(s))ds + \varepsilon \int\limits_{t}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds \right) d\varepsilon,$$

$$\Delta^2_{j,t}(\tau) = \int_t^\tau F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds \tag{2.6.25}$$

$$\circ \int_0^1 \left[\nabla g_j(g^{-1}(v_-) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds \right.$$

$$+\varepsilon \int\limits_{t}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s))ds)$$

$$-\nabla g_j(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{t} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds$$

$$\left. +\varepsilon \int_{t}^{\tau} F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))ds)\right] d\varepsilon,$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Pour estimer (2.6.24) on utilise tout d'abord (2.5.3), puis (2.5.2), (2.5.16), (2.5.14) et (2.6.14)-(2.6.15), et on obtient

$$\begin{aligned} |\Delta^1_{j,t}(\tau)| &\leq \frac{n^{3/2}\beta_2 2^{\alpha+2}(2+r/c)}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}}\|(f_2-f_1, h_2-h_1)\|_T \\ &\times \int_\tau^t (1+|x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2}-r)s)^{-(\alpha+2)}(1+s)ds \\ &+ \frac{n\beta_1 2^{\alpha+1}}{c\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}}\int_\tau^t (1+|x_-|/\sqrt{2} + (|v_-|/\sqrt{2}-r)s)^{-(\alpha+1)}ds \\ &\times \|(f_2-f_1, h_2-h_1)\|_T. \end{aligned} \tag{2.6.26}$$

Ainsi de (2.5.9) et (2.5.12), on a

$$\begin{aligned} \int_0^t |\Delta^1_{j,t}(\tau)|d\tau &\leq \frac{n^{3/2}\tilde{\beta}2^{\alpha+3}(1+c^{-1})(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^3(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha-1}} \\ &\times \|(f_2-f_1, h_2-h_1)\|_T, \end{aligned} \tag{2.6.27}$$

où $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$. Pour estimer (2.6.25), on utilise d'abord (2.5.5), puis (2.5.16), et on obtient

$$|\Delta^2_{j,t}(\tau)| \leq \int_\tau^t |F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s))|ds \left[\frac{3c^{-1}\sqrt{n}}{(1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)})}\right.$$

$$\times \int_0^1 \left| \int_{-\infty}^{t} (F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s)) - F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s)))ds\right.$$

$$\left.\left. +\varepsilon \int_{t}^{\tau} (F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s)) - F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s)))ds \right| d\varepsilon \right]. \tag{2.6.28}$$

On utilisera

$$\left| \int_{-\infty}^{t} (F(v_-s + x_- + f_2(s), v_- + h_2(s)) - F(v_-s + x_- + f_1(s), v_- + h_1(s)))ds \right.$$

$$+\varepsilon \int_t^\tau (F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))-F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s)))ds\Bigg|$$

$$\leq 2\int_{-\infty}^t |(F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))-F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s)))|ds, \tag{2.6.29}$$

pour tout $0\leq\varepsilon\leq 1$ (on rappelle que $\tau\leq t$).

De (2.6.28), (2.6.29), on déduit

$$|\Delta^2_{j,t}(\tau)| \leq \frac{6\sqrt{n}}{c(1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)})}\int_\tau^t |F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))|ds$$

$$\times\int_{-\infty}^t |(F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))-F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s)))|ds. \tag{2.6.30}$$

En utilisant (2.5.2), (2.5.14), (2.6.14)-(2.6.15), (2.5.7) et (2.5.11), on obtient

$$\int_{-\infty}^t |F(v_-s+x_-+f_2(s),v_-+h_2(s))-F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))|ds$$
$$\leq \frac{n^{3/2}\tilde\beta 2^{\alpha+4}(1+1/c)(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)}{\alpha(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2(1+|x_-|/\sqrt{2})^\alpha}\|(f_2-f_1,h_2-h_1)\|_T. \tag{2.6.31}$$

En utilisant (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.9), on obtient

$$\int_0^t\int_\tau^t |F(v_-s+x_-+f_1(s),v_-+h_1(s))|dsd\tau \leq \frac{n\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)}{\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^2(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha-1}}. \tag{2.6.32}$$

De (2.6.30)-(2.6.32), on déduit

$$\begin{aligned}\int_0^t |\Delta^2_{j,t}(\tau)| \;\leq\; & \frac{3n^3\tilde\beta^2 2^{2\alpha+6}(1+\frac{1}{c})(2+\frac{r}{c})(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)}{c(1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)})\alpha^2(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^4(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{2\alpha-1}}\\ & \times\|(f_2-f_1,h_2-h_1)\|_T. \end{aligned}\tag{2.6.33}$$

De (2.6.20), (2.6.21), (2.6.23), (2.6.27) et (2.6.33), on a

$$|A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t)-t(A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t))|$$

$$\leq \frac{n^2\tilde{\beta}2^{\alpha+3}(1+\frac{1}{c})(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}+1-r)}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)^3(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha-1}}$$
$$\times\left[2+\frac{3}{c\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}}\frac{n^{3/2}\tilde{\beta}2^{\alpha+3}(2+\frac{r}{c})}{\alpha(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}}-r)(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^{\alpha}}\right]$$
$$\times\|(f_1-f_2,h_1-h_2)\|_T,$$

ce qui implique

$$|A^1_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^1_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t)-t(A^2_{v_-,x_-}(f_2,h_2)(t)-A^2_{v_-,x_-}(f_1,h_1)(t))|$$

$$\leq \frac{n^{7/2}\tilde{\beta}(1+\tilde{\beta})3(1+1/c)^3 2^{2\alpha+7}(|v_-|/\sqrt{2}+1-r)^2}{\sqrt{1+(|v_-|^2/(4(c^2-|v_-|^2)))}\alpha(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^4(1+|x_-|/\sqrt{2})^{\alpha-1}}$$
$$\times\|(f_1-f_2,h_1-h_2)\|_T. \tag{2.6.34}$$

En utilisant (2.6.16), (2.5.6), (2.5.10) et (2.6.19), on obtient (2.2.11). En utilisant (2.6.16), (2.5.7), (2.5.11) et (2.6.34), on obtient (2.2.12). On a démontré le Lemme 2.2.1. □

2.6.2 Preuve du Lemme 2.2.2

Les estimations (2.2.15) et (2.2.16) sont conséquences immédiates de (2.6.3), (2.5.6) et (2.6.4).

De (2.5.1), (2.5.14), (2.5.7) et de $|v_-|\leq c$, on obtient que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds$$

converge absolument pour tout $(f,h)\in M_{T,r}$. De plus, en utilisant (2.5.4), (2.5.16), puis (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.8), on a pour tout $u>0$

$$\int_u^{+\infty}\left|g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau} F(v_-s+x_-+f(s),v_-s+h(s))ds)\right.$$
$$\left.-g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{+\infty} F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\right|d\tau$$
$$\leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+\frac{r}{c})}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}}\int_u^{+\infty}\int_\tau^{+\infty}(1+|x_-|/\sqrt{2}+(|v_-|/\sqrt{2}-r)s)^{-(\alpha+1)}dsd\tau$$
$$\leq \frac{n^{3/2}\beta_1 2^{\alpha+1}(2+r/c)(1+|x_-|/\sqrt{2}+(|v_-|/\sqrt{2}-r)u)^{-(\alpha-1)}}{\sqrt{1+\frac{|v_-|^2}{4(c^2-|v_-|^2)}}\alpha(\alpha-1)(|v_-|/\sqrt{2}-r)^2}. \tag{2.6.35}$$

Ainsi on peut réécrire $A^1_{v_-,x_-}$ sous la forme

$$A^1_{v_-,x_-}(f,h)(t) = t\left[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)-v_-\right]$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)-v_-\right]d\tau$$
$$+\int\limits_{0}^{+\infty}\Bigg[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)$$
$$-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\Bigg]d\tau$$
$$-\int\limits_{t}^{+\infty}\Bigg[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)$$
$$-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\Bigg]d\tau \tag{2.6.36}$$

et on obtient alors (2.2.17) et (2.2.18)-(2.2.19), où

$$H_{v_-,x_-}(f,h)(t) = \int\limits_{t}^{+\infty}\Bigg[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)$$
$$-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\Bigg]d\tau. \tag{2.6.37}$$

Les formules (2.6.37) et (2.6.35) donnent (2.2.23). En utilisant (2.6.37), (2.5.4), (2.5.16), (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.6), on obtient (2.2.22).

En utilisant (2.2.18), (2.5.4), (2.5.16), (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.7), on obtient (2.2.20).

On écrit

$$l_{v_-,x_-}(f,h) = A^1_{v_-,x_-}(f,h)(0)+\int\limits_{0}^{+\infty}\Bigg[g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+f(s),$$
$$v_-+h(s))ds)-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\Bigg]d\tau. \tag{2.6.38}$$

En utilisant (2.6.38), (2.6.8) et (2.6.35), on obtient (2.2.21).

Finalement on a démontré le Lemme 2.2.2. □

2.6.3 Preuve du Lemme 2.2.3

En utilisant (2.2.4) et (2.2.10), on obtient

$$\|(y_-,u_-)-(0,0)\|_T=\|(y_-,u_-)\|_T\le\rho(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r),\ T=+\infty.$$

En utilisant (2.2.18), (2.6.11) avec (2.6.16) et (2.5.11) ($T=+\infty$ et $t\to+\infty$), on obtient (2.2.24).

De (2.6.38), on a

$$\begin{aligned}
&|l_{v_-,x_-}(y_-,u_-)-l_{v_-,x_-}(0,0)|\le|A^1_{v_-,x_-}(y_-,u_-)(0)-A^1_{v_-,x_-}(0,0)(0)| \qquad (2.6.39)\\
&+\left|\lim_{t\to+\infty}\left\{\int_0^t\left[g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+y_-(s),v_-+u_-(s))ds)\right.\right.\right.\\
&-g(g^{-1}(v_-)+\textstyle\int_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-+y_-(s),v_-+u_-(s))ds)\\
&-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-,v_-)ds)+g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-,v_-)ds)\\
&-\Big(g(g^{-1}(v_-)+\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+y_-(s),v_-+u_-(s))ds)\\
&-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-+y_-(s)+u_-(s))ds)\Big)+(g(g^{-1}(v_-)\\
&\left.\left.\left.+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-)ds)-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-)ds)\Big)\right]d\tau\right\}\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.5.4), (2.5.16), (2.5.1), (2.5.14) et (2.5.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&t\left|g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\right.\\
&\left.-g(g^{-1}(v_-)+\int\limits_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-+f(s),v_-+h(s))ds)\right|\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0,
\end{aligned}\qquad(2.6.40)$$

pour tous $t>0$, $(f,h)\in M_{T,r}$.

De (2.6.39) et (2.6.40), on obtient

$$\begin{aligned}
&|l_{v_-,x_-}(y_-,u_-)-l_{v_-,x_-}(0,0)|\le|A^1_{v_-,x_-}(y_-,u_-)(0)-A^1_{v_-,x_-}(0,0)(0)| \qquad (2.6.41)\\
&+\Big|\lim_{t\to+\infty}\Big\{\textstyle\int_0^t\Big[g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-+y_-(s),v_-+u_-(s))ds)\\
&-g(g^{-1}(v_-)+\textstyle\int_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-+y_-(s),v_-+u_-(s))ds)-g(g^{-1}(v_-)\\
&+\textstyle\int_{-\infty}^{\tau}F(v_-s+x_-,v_-)ds)+g(g^{-1}(v_-)+\int_{-\infty}^{t}F(v_-s+x_-,v_-)ds)\Big]d\tau\Big\}\Big|.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6.21)-(2.6.23), (2.6.27) et (2.6.33), et en utilisant l'inégalité $\|(y_-,u_-)\|_T\le\rho(c,n,\tilde\beta,\alpha,|v_-|,|x_-|,r)$, $T=+\infty$, et (2.6.41), nous obtenons (2.2.26).

Nous allons maintenant démontrer (2.2.25). Tout d'abord

$$v_- + k_{v_-,x_-}(y_-,u_-) = g(g^{-1}(v_-) + \int_{-\infty}^{+\infty} F(v_- s + x_- + y_-(s), v_- + u_-(s))ds). \tag{2.6.42}$$

En utilisant l'intégrale première du mouvement E, nous avons $|v_-| = |v_- + k_{v_-,x_-}(y_-,u_-)|$, et en appliquant g^{-1} à l'égalité (2.6.42), nous obtenons

$$\frac{k_{v_-,x_-}(y_-,u_-)}{\sqrt{1-|v_-|^2/c^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v_- s + x_- + y_-(s), v_- + u_-(s))ds. \tag{2.6.43}$$

De (2.6.43), (2.6.13), (2.6.14)-(2.6.15), (2.5.7) et (2.5.11) et de $\|(y_-,u_-)\|_T \leq \rho(c,n,\tilde{\beta},\alpha,|v_-|,|x_-|,r),\ T=+\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\frac{k_{v_-,x_-}(y_-,u_-)}{\sqrt{1-|v_-|^2/c^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} F(v_- s + x_-, v_-)ds\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(v_- s + x_- + y_-(s), v_- \\ &\quad + u_-(s)) - F(v_- s + x_-, v_-)|ds \\ &\leq \frac{n^{3/2}\tilde{\beta}2^{\alpha+4}(1+\frac{1}{c})(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} - r + 1)}{\alpha(\frac{|v_-|}{\sqrt{2}} - r)^2(1+\frac{|x_-|}{\sqrt{2}})^\alpha} \\ &\quad \times \rho(c,n,\tilde{\beta},\alpha,|v_-|,|x_-|,r).\end{aligned}$$

Finalement, on a démontré le Lemme 2.2.3. □

2.7 Preuve du Théorème 2.3.2

On suppose toujours que les constantes α, n, c, β_1, β_2 sont fixées. On fixe $(\theta,x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

On utilisera l'inégalité suivante

$$\left|\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta, s\theta)d\tau\right| \leq \frac{2\beta_1 n}{\alpha(s/\sqrt{2})(1+|x|/\sqrt{2} - u/\sqrt{2})^\alpha}, \tag{2.7.1}$$

pour tous $s \in]0,c[$ et $u \in]-\infty, 0]$; et on utilisera l'inégalité

$$\left|\frac{1}{s}\int_{u}^{+\infty} F(x+\tau\theta, s\theta)d\tau\right| \leq \frac{2\beta_1 n}{\alpha(s/\sqrt{2})(1+|x|/\sqrt{2} + u/\sqrt{2})^\alpha}, \tag{2.7.2}$$

pour tous $s \in]0,c[$ et $u \in [0,+\infty[$.

Commençons par démontrer (2.7.1) (la preuve de (2.7.2) est tout à fait similaire à celle de (2.7.1)).

Comme $\theta \circ x = 0$ et $|\theta| = 1$, on a

$$|x + w\theta| \geq |x|/\sqrt{2} + |w|/\sqrt{2}, \tag{2.7.3}$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$. L'estimation (2.7.1) se déduit alors de (2.5.1), (2.7.3) et (2.5.6).

Avant de démontrer le Théorème 2.3.2, nous aurons besoin de trois lemmes (Lemmes 2.7.1, 2.7.2, 2.7.3) que l'on énonce et que l'on démontre ci-dessous.

Lemme 2.7.1. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3), *il existe une fonction* $\tilde{g}_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|} :]-\infty,0] \to [0,+\infty[$ *intégrable sur* $]-\infty,0]$ *telle que*

$$\begin{aligned}&\left|(1+\delta_1(c,\theta,x,s,u))^{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2}\right| \\ &\le \tilde{g}_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u)(1-s^2/c^2), \qquad (2.7.4)\end{aligned}$$

pour tous $u \in]-\infty,0]$, $s \in [z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|),c[$, *où* z_2 *est défini par* (2.3.13) *et*

$$\delta_1(c,\theta,x,s,u) = \frac{-2V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}} + \frac{1-\frac{s^2}{c^2}}{s^2}\left|\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2}{c^2} \ge -\frac{3}{4}, \qquad (2.7.5)$$

pour tous $u \in]-\infty,0]$, $s \in [z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|),c[$.

Preuve du Lemme 2.7.1. Soient $s \in]0,c[$, $s \ge z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$ et $u \in]-\infty,0]$. De (2.7.1) et de la définition de $z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$ (voir (2.3.13)), on obtient

$$\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right| \ge \frac{s}{2\sqrt{1-s^2/c^2}}. \qquad (2.7.6)$$

En développant le carré de la norme on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2 &= \frac{s^2}{1-\frac{s^2}{c^2}} - \frac{2V(x+u\theta)}{\sqrt{1-s^2/c^2}} \\ &\quad + \left|\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2 \qquad (2.7.7)\end{aligned}$$

(remarquons que $(B(x)y) \circ y = 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$). En utilisant (2.7.6) et (2.7.7), on obtient

$$\begin{aligned}\delta_1(c,\theta,x,s,u) &= \frac{1+\frac{1}{c^2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2}{1+\frac{s^2}{c^2-s^2}} - 1 \\ &\ge \frac{1+\frac{s^2}{4(c^2-s^2)}}{1+\frac{s^2}{c^2-s^2}} - 1 \ge -3/4. \qquad (2.7.8)\end{aligned}$$

De plus, de la définition de $\delta_1(c,\theta,x,s,u)$, et de (2.1.2)-(2.1.3), (2.5.1), (2.7.1), (2.5.6) et de l'hypothèse $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, $s<c$, on a

$$\begin{aligned}|\delta_1(c,\theta,x,s,u)| &\leq \sqrt{1-s^2/c^2}\Bigg[\frac{\beta_0 2(1+|x|/\sqrt{2}-u/\sqrt{2})^{-\alpha}}{c^2}\\ &+\frac{\sqrt{1-\frac{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2}{c^2}}\beta_1^2 n^2 8(1+\frac{|x|}{\sqrt{2}}-\frac{u}{\sqrt{2}})^{-2\alpha}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2c^2\alpha^2}\Bigg]\end{aligned}\qquad(2.7.9)$$

En utilisant le développement de Taylor de la fonction $]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $\delta\mapsto(1+\delta)^{-1/2}$ en $\delta=0$, on a,

$$\begin{aligned}(1+\delta_1(c,\theta,x,s,u))^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2} &= -\frac{1-\frac{s^2}{c^2}}{2s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{u}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\\ &+\tfrac{3}{4}\int_0^1(1-w)(1+w\delta_1(c,\theta,x,s,u))^{-5/2}dw\ \delta_1(c,\theta,x,s,u)^2.\end{aligned}\qquad(2.7.10)$$

On estime le premier terme du côté droit de (2.7.10) grâce à (2.5.1), (2.7.1), (2.5.6). On estime le second terme du côté droit de (2.7.10) en utilisant (2.7.8) et (2.7.9). En utilisant aussi l'inégalité $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, on obtient finalement

$$\left|(1+\delta_1(c,\theta,x,s,u))^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2}\right|\leq(1-s^2/c^2)\tilde g_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde g_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u) &= \frac{8n^2\beta_1^2}{c^2z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2}-u/\sqrt{2})^{2\alpha}}\\ &+4^{5/2}\frac{3}{2c^4}\Big[\beta_0(1+|x|/\sqrt{2}-u/\sqrt{2})^{-\alpha}\\ &+\frac{\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}4\beta_1^2n^2(1+|x|/\sqrt{2}-u/\sqrt{2})^{-2\alpha}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha^2}\Big]^2.\end{aligned}$$

Finalement, on a démontré le Lemme 2.7.1. □

Lemme 2.7.2. *Soit β un réel strictement positif et soit $s\in]0,c[$, $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$. Alors il existe un nombre réel strictement positif $k_{\beta,c,n,\beta_1,\alpha,|x|}$ tel que*

$$\left|\left(1+\frac{1-s^2/c^2}{s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)^{-\beta}-1\right|\leq(1-s^2/c^2)k_{\beta,c,n,\beta_1,\alpha,|x|}.$$

Preuve du Lemme 2.7.2. On définit

$$\delta_2(c,\theta,x,s)=\frac{1-s^2/c^2}{s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\geq 0.\qquad(2.7.11)$$

En utilisant (2.7.1)-(2.7.2) et l'inégalité $s \geq z_2(c, n, \beta_1, \alpha, |x|)$, on obtient

$$\delta_2(c,\theta,x,s) \leq (1 - s^2/c^2)\frac{32n^2\beta_1^2}{c^2 z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2})^{2\alpha}}. \quad (2.7.12)$$

En utilisant le développement de Taylor de la fonction $]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\delta \mapsto (1+\delta)^{-\beta}$ en $\delta = 0$, et en utilisant (2.7.11), on obtient

$$(1+\delta_2(c,\theta,x,s))^{-\beta} - 1 = -\beta\delta_2(c,\theta,x,s)\int_0^1 (1+w\delta_2(c,\theta,x,s))^{-(\beta+1)}dw. \quad (2.7.13)$$

De (2.7.11)-(2.7.13), on a

$$|(1+\delta_2(c,\theta,x,s))^{-\beta} - 1| \leq \beta\delta_2(c,\theta,x,s) \leq (1-s^2/c^2)k_{\beta,c,d,\beta_1,\alpha,|x|},$$

où

$$k_{\beta,c,n,\beta_1,\alpha,|x|} = \frac{32\beta n^2\beta_1^2}{c^2 z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2})^{2\alpha}}.$$

Finalement, on a démontré le Lemme 2.7.2. □

On suppose toujours que $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, et que les constantes α, n, c, β_1, β_2 sont fixées. Soient $s \in]0, c[$, $s \geq z_2(c, n, \beta_1, \alpha, |x|)$, $u \in [0, +\infty[$. On définit

$$A(c,\theta,x,s,u) = (1 + t(c,\theta,x,s,u))^{-1/2}, \quad (2.7.14)$$

où

$$t(c,\theta,x,s,u) = \frac{1+\frac{1}{c^2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u} F(x+\tau\theta, s\theta)d\tau\right|^2}{1+\frac{1}{c^2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\tau\theta, s\theta)d\tau\right|^2} - 1. \quad (2.7.15)$$

En développant le carré des normes qui apparaissent au dénominateur et au numérateur de la fraction du côté droit de (2.7.15), on obtient

$$\begin{aligned} t(c,\theta,x,s,u) \;=\; & \frac{-2V(x+u\theta)\sqrt{1-s^2/c^2} + \frac{1-s^2/c^2}{s^2}\left|\int_u^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2}{\left(1+\frac{(1-s^2/c^2)}{s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)c^2} \\ & - \frac{\frac{2(1-s^2/c^2)}{s^2}\int_u^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau \circ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau}{\left(1+\frac{(1-s^2/c^2)}{s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)c^2}, \quad (2.7.16) \end{aligned}$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2.7.3. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3)*, il existe une fonction* $h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *intégrable sur* $[0,+\infty[$ *telle que pour tous* $s\in]0,c[$, $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, $u\in[0,+\infty[$, *on a*

$$\left|A(c,\theta,x,s,u)-1-V(x+u\theta)\frac{\sqrt{1-s^2/c^2}}{c^2}\right|\leq(1-s^2/c^2)h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u).$$

Preuve du Lemme 2.7.3. On cherche tout d'abord une borne supérieure sur $t(c,\theta,x,s,u)$. On a

$$\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|\geq\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|$$
$$-\left|\frac{1}{s}\int_u^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|. \quad (2.7.17)$$

De (2.7.1)-(2.7.2), on a

$$\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|\geq\frac{s}{\sqrt{1-s^2/c^2}}-\frac{4\beta_1 n}{\alpha(s/\sqrt{2})(1+|x|/\sqrt{2})^{\alpha}}. \quad (2.7.18)$$

En utilisant d'abord (2.7.2) puis l'inégalité $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$ et (2.7.18), on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s}\int_u^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right| &\leq \frac{2\beta_1 n}{(s/\sqrt{2})\alpha(1+|x|/\sqrt{2})^{\alpha}}\\ &\leq \frac{1}{6}\left(\frac{s}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}-\frac{4\beta_1 n}{\alpha\frac{s}{\sqrt{2}}(1+\frac{|x|}{\sqrt{2}})^{\alpha}}\right)\\ &\leq \frac{1}{6}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|,\end{aligned} \quad (2.7.19)$$

et de (2.7.17) et (2.7.19), on obtient

$$\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{u}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|\geq\frac{5}{6}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|. \quad (2.7.20)$$

En utilisant (2.7.15) et (2.7.20), on a

$$t(c,\theta,x,s,u)\geq\frac{25}{36}-1=-\frac{11}{36}. \quad (2.7.21)$$

On cherche maintenant une borne supérieure pour $t(c,\theta,x,s,u)$. Le côté droit de (2.7.16) est une soustraction de deux fractions dont le dénominateur est plus grand que c^2, ce qui implique

$$|t(c,\theta,x,s,u)| \le \frac{1}{c^2}\left|-2V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}} + \frac{1-\frac{s^2}{c^2}}{s^2}\left|\int_u^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right.$$

$$\left.-\frac{2(1-\frac{s^2}{c^2})}{s^2}\int_u^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau \circ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|, \tag{2.7.22}$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, en utilisant (2.1.2), (2.7.1)-(2.7.2), on obtient

$$\begin{aligned} |t(c,\theta,x,s,u)| &\le c^{-2}\sqrt{1-s^2/c^2}\Big[2\beta_0(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{-\alpha} \\ &+\frac{\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2}\frac{n^2\beta_1^2 8}{\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{2\alpha}} \\ &+\frac{\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2}\frac{n^2\beta_1^2 32}{\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{\alpha}(1+|x|/\sqrt{2})^{\alpha}}\Big]. \end{aligned} \tag{2.7.23}$$

En utilisant (2.7.14), (2.7.21), et le développement de Taylor de la fonction $]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $\delta\mapsto(1+\delta)^{-1/2}$ en $\delta=0$, et en utilisant (2.7.16), on obtient

$$\begin{aligned} &\left|A(c,\theta,x,s,u)-1-\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-s^2/c^2}}{c^2}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}t(c,\theta,x,s,u)+\frac{3}{4}\int_0^1(1-w)(1+w\ t(c,\theta,x,s,u))^{-\frac{5}{2}}dw\ t(c,\theta,x,s,u)^2\right. \\ &\left.-\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-s^2/c^2}}{c^2}\right| \\ &\le \left|\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2}\left[1-\left(1+\frac{1-\frac{s^2}{c^2}}{c^2s^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)^{-1}\right]\right| \\ &+\frac{\frac{2(1-s^2/c^2)}{s^2}\int_u^{+\infty}|F(x+\tau\theta,s\theta)|d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+\tau\theta,s\theta)|d\tau}{\left(1+\frac{(1-s^2/c^2)}{s^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)c^2} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\frac{1-s^2/c^2}{s^2}\left|\int\limits_u^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2}{\left(1+\frac{(1-s^2/c^2)}{s^2c^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x+\tau\theta,s\theta)d\tau\right|^2\right)c^2}+\frac{3}{8}(\frac{25}{36})^{-\frac{5}{2}}t(c,\theta,x,s,u)^2. \quad (2.7.24)$$

On utilise le Lemme 2.7.2, les conditions (2.1.2) et le fait que $s \geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$ pour estimer le premier terme du côté droit de l'inégalité (2.7.24). Afin d'estimer les deuxième et troisième termes du côté droit de l'inégalité (2.7.24), on utilise le fait que le dénominateur est plus grand que c^2, et on utilise aussi (2.7.1)-(2.7.2), et le fait que $s \geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$. On estime le quatrième terme du côté droit de l'inégalité (2.7.24) par (2.7.23). Ainsi on obtient

$$\left|A(c,\theta,x,s,u)-1-\frac{V(x+u\theta)\sqrt{1-s^2/c^2}}{c^2}\right| \leq (1-s^2/c^2)h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u),$$

où

$$\begin{aligned}
&h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(u) = \\
&\frac{1}{c^2}(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{-\alpha}\Big\{\beta_0 k_{1,c,n,\beta_1,\alpha,|x|}\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2} \\
&+\frac{4\beta_1^2n^2}{\alpha^2 z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2}\left((1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{-\alpha}+4(1+|x|/\sqrt{2})^{-\alpha}\right) \\
&+\frac{3}{2c^2}(\frac{25}{36})^{-\frac{5}{2}}\Big[\beta_0(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{-\alpha/2} \\
&+\frac{4n^2\beta_1^2\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha^2(1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{\alpha/2}} \\
&\times\left((1+|x|/\sqrt{2}+u/\sqrt{2})^{-\alpha}+4(1+|x|/\sqrt{2})^{-\alpha}\right)\Big]^2\Big\}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a démontré le Lemme 2.7.3. □

Preuve du Théorème 2.3.2. On suppose que les constantes α, n, c, β_1 et β_2 sont fixées. Soit $(\theta,x)\in T\mathbb{S}^{n-1}$ et soit $s\in]0,c[$, $s\geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$. On va étudier l'asymptotique de $l_{s\theta,x}(0,0)$ qui est défini par la formule (2.2.19).

Tout d'abord, on cherche l'asymptotique de

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\left[g(g^{-1}(s\theta)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(us\theta+x,s\theta)du)-s\theta\right]d\tau.$$

Par les changements de variables sucessifs « τ »= $s\tau$, puis « u »= su, on obtient

$$\int_{-\infty}^{0}\left[g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{\tau}F(us\theta+x,s\theta)du)-s\theta\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{\frac{\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du}{\sqrt{1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}}-\theta\right]d\tau. \quad (2.7.25)$$

En développant le carré de la norme qui apparaît au dénominateur de la fraction sous l'intégrale du côté droit de l'égalité (2.7.25), ce dénominateur devient

$$\left(1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-1/2}=$$
$$(1+\delta_1(c,\theta,x,s,\tau))^{-1/2}(1-s^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.7.26)$$

où δ_1 est défini par (2.7.5). On définit

$$\Lambda_1(\theta,x,s)=\Bigg|(1-s^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{0}\left[g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{\tau}F(us\theta+x,s\theta)du)-s\theta\right]d\tau$$
$$-c^{-2}\int_{-\infty}^{0}V(\tau\theta+x)d\tau\theta-s^{-2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)dud\tau\Bigg|. \quad (2.7.27)$$

De (2.7.25)-(2.7.27), on a

$$\Lambda_1(\theta,x,s)\le\int_{-\infty}^{0}\left|(1+\delta_1(c,\theta,x,s,\tau))^{-\frac{1}{2}}-1-c^{-2}V(\tau\theta+x)\sqrt{1-s^2/c^2}\right|$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+s^{-2}\int_{-\infty}^{\tau}|F(u\theta+x,s\theta)|du\right)d\tau$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\Bigg|(1+\frac{1}{c^2}V(\tau\theta+x)\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}})\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right)$$
$$-\frac{\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}-c^{-2}V(\tau\theta+x)\theta-s^{-2}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\Bigg|d\tau. \quad (2.7.28)$$

On estime la première intégrale du côté droit de (2.7.28) en utilisant le Lemme 2.7.1. Par conséquent en développant le premier produit sous la seconde intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{0}$ située du côté droit de (2.7.28), on obtient

$$\Lambda_1(\theta,x,s)\le\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}\int_{-\infty}^{0}\Bigg[\tilde{g}_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(\tau)\Bigg(1+\frac{1}{s^2}\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}\int_{-\infty}^{\tau}|F(u\theta+x,$$
$$s\theta)|du)+\left|\frac{V(\tau\theta+x)}{s^2c^2}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|\Bigg]d\tau. \quad (2.7.29)$$

On définit $|V|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}|V(y)|$. En utilisant (2.7.29), (2.1.2), (2.7.1)-(2.7.2) et (2.5.8), et le fait que $s \geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, on a

$$\Lambda_1(\theta,x,s) \leq \sqrt{1-s^2/c^2}\Bigg[\bigg(1+\frac{\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2}\frac{\beta_1 n 2\sqrt{2}}{\alpha(1+|x|/\sqrt{2})^\alpha}\bigg) \times \int_{-\infty}^0 \tilde{g}_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(\tau)d\tau + \frac{\beta_1 n 4|V|_\infty}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2c^2\alpha(\alpha-1)(1+|x|/\sqrt{2})^{\alpha-1}}\Bigg]. \quad (2.7.30)$$

Maintenant, on cherche l'asymptotique de

$$\int_0^{+\infty}\left[g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{\tau}F(us\theta+x,s\theta)du)-g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{+\infty}F(us\theta+x,s\theta)du)\right]d\tau.$$

Par les changements de variables « τ »$= s\tau$, puis « u »$= su$, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Bigg[g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{\tau}F(us\theta+x,s\theta)du)\\ &-g(g^{-1}(s\theta)+\int_{-\infty}^{+\infty}F(us\theta+x,s\theta)du)\Bigg]d\tau\\ &=\int_0^{+\infty}\Bigg[\frac{\frac{\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du}{\sqrt{1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}}\\ &-\frac{\frac{\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du}{\sqrt{1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}}\Bigg]d\tau. \quad (2.7.31)\end{aligned}$$

On étudie tout d'abord le dénominateur de la première fraction qui est sous l'intégrale de (2.7.31). De (2.7.15) et (2.7.14), on a

$$\begin{aligned}&\left(1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &=\left(1+c^{-2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}A(c,\theta,x,s,\tau). \quad (2.7.32)\end{aligned}$$

On définit

$$\Lambda_2(c,\theta,x,s) := \Bigg|(1-s^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \Bigg[g(g^{-1}(s\theta) + \int_{-\infty}^{\tau} F(us\theta + x, s\theta)du) - g(g^{-1}(s\theta) + \int_{-\infty}^{+\infty} F(us\theta + x, s\theta)du) \Bigg] d\tau - c^{-2}\int_0^{+\infty} V(\tau\theta + x)d\tau\theta + s^{-2}\int_0^{+\infty}\int_\tau^{+\infty} F(u\theta + x, s\theta)dud\tau \Bigg|. \quad (2.7.33)$$

De (2.7.31)-(2.7.33), on déduit

$$\Lambda_2(c,\theta,x,s) \leq \Lambda_{2,1}(c,\theta,x,s) + \Lambda_{2,2}(c,\theta,x,s), \quad (2.7.34)$$

où

$$\Lambda_{2,1}(c,\theta,x,s) := \int_0^{+\infty} \Bigg|(1-\tfrac{s^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(A(c,\theta,x,s,\tau) - 1 - V(\tau\theta+x)\frac{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2}\right) \times \left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + \frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{\tau} F(u\theta+x,s\theta)du\right)\Bigg| d\tau, \quad (2.7.35)$$

$$\Lambda_{2,2}(c,\theta,x,s) := \int_0^{+\infty} \Bigg|(1-\tfrac{s^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \Bigg[\left(1 + V(\tau\theta+x)\frac{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}}{c^2}\right)\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + \frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{\tau} F(u\theta+x,s\theta)du\right) - \left(\frac{\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u\theta+x,s\theta)du\right)\Bigg] - \frac{V(\tau\theta+x)}{c^2}\theta + \frac{1}{s^2}\int_\tau^{+\infty} F(u\theta+x,s\theta)du\Bigg| d\tau. \quad (2.7.36)$$

Commençons par estimer $\Lambda_{2,1}(c,\theta,x,s)$.

Du Lemme 2.7.3 et de (2.7.35), on a

$$\Lambda_{2,1}(c,\theta,x,s) \leq \sqrt{1-\tfrac{s^2}{c^2}} \left(1 + \tfrac{1}{c^2}\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2/c^2}} + \frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(u\theta+x,s\theta)|du\right)\int_0^{+\infty} h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(\tau)d\tau. \quad (2.7.37)$$

De plus, en développant le carré de la norme apparaissant dans le premier terme ci-dessous, on a

$$\left(1+\frac{\left|\frac{s\theta}{\sqrt{1-s^2/c^2}}+\frac{1}{s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1-s^2/c^2}\left(1+\frac{1-s^2/c^2}{s^2c^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.7.38}$$

$$\leq \sqrt{1-s^2/c^2}. \tag{2.7.39}$$

En utilisant (2.7.37)-(2.7.39), (2.7.1), (2.7.2), et le fait que $s \geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,1}(c,\theta,x,s) \quad &\leq \quad \sqrt{1-s^2/c^2}\left(1+\frac{\beta_1 n\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}4\sqrt{2}}{z_2(c,d,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha(1+|x|/\sqrt{2})^\alpha}\right)\\ &\times\int_0^{+\infty}h_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.7.40}$$

Estimons maintenant $\Lambda_{2,2}(c,\theta,x,s)$.
De (2.7.36) et (2.7.38), on a

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,2}(c,\theta,x,s) \leq \int\limits_0^{+\infty}&\left|\left(1+\frac{1-s^2/c^2}{s^2c^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right|\\ &\times\left|-\frac{1}{s^2}\int\limits_{\tau}^{+\infty}F(u\theta+x,s\theta)du+\frac{V(\tau\theta+x)}{c^2}\theta\right.\\ &\left.+\frac{\sqrt{1-s^2/c^2}}{s^2c^2}V(\tau\theta+x)\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|d\tau\\ &+\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{1-s^2/c^2}}{s^2c^2}V(\tau\theta+x)\int\limits_{-\infty}^{\tau}F(u\theta+x,s\theta)du\right|d\tau.\end{aligned} \tag{2.7.41}$$

Ainsi en utilisant le Lemme 2.7.2, les conditions (2.1.2), et (2.5.1), (2.7.3), (2.5.6), (2.5.7) et (2.7.1)-(2.7.2), et le fait que $s \geq z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,2}(c,\theta,x,s) \leq \sqrt{1-s^2/c^2}&\left[\frac{k_{1/2,c,n,\beta_1,\alpha,|x|}\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{(\alpha-1)(1+|x|/\sqrt{2})^{\alpha-1}}\right.\\ \times&\left(\frac{n\beta_1 4}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2\alpha}+\frac{\beta_0\sqrt{2}}{c^2}+\frac{n\beta_0\beta_1 8\sqrt{1-z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2/c^2}}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2c^2\alpha(1+|x|/\sqrt{2})^\alpha}\right)\\ &\left.+\frac{n\beta_0\beta_1 8}{z_2(c,n,\beta_1,\alpha,|x|)^2c^2\alpha(\alpha-1)(1+|x|/\sqrt{2})^{2\alpha-1}}\right].\end{aligned} \tag{2.7.42}$$

De (2.2.19), (2.7.27), (2.7.30), (2.7.33), (2.7.35)-(2.7.36), (2.7.40) et (2.7.42), on déduit qu'il existe $C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}$ telle que

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{l_{s\theta,x}(0,0)}{\sqrt{1-s^2/c^2}}-\frac{1}{c^2}PV(\theta,x)\theta+\frac{1}{s^2}\int_0^{+\infty}\!\!\int_\tau^{+\infty}F(x+u\theta,s\theta)dud\tau\\ &-\frac{1}{s^2}\int_{-\infty}^0\!\!\int_{-\infty}^{\tau}F(x+u\theta,s\theta)dud\tau\Big|\leq\Lambda_1(c,\theta,x,s)+\Lambda_2(c,\theta,x,s)\\ &\qquad\leq C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|}\sqrt{1-s^2/c^2}.\end{aligned}\qquad(2.7.43)$$

L'estimée (2.3.14) se déduit de (2.7.43). Finalement, on a démontré le Théorème 2.3.2. □

2.8 À propos du temps de retard

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 2.3, en utilisant les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 nous pouvons obtenir l'asymptotique et des estimations pour des fonctions s'exprimant à l'aide de $a(v_-,x_-)$ et $b(v_-,x_-)$ lorsque l'on considère de la diffusion aux petits angles. Dans cette section, nous considérons notamment le cas du temps de retard. Nous rappelons la définition du temps de retard, puis nous en donnons une estimation et une asymptotique dans le cas de la diffusion aux petits angles (sous-section 2.8.1). Nous montrons que l'asymptotique trouvée pour le temps de retard détermine de manière unique le potentiel scalaire V et nous montrons aussi que cette asymptotique détermine de manière unique le champ B si B est magnétique (i.e. $B\in\mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$), mais qu'elle ne détermine pas de manière unique B si $B\notin\mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ et $n\geq 3$ (Proposition 2.8.1 de la sous-section 2.8.2). Dans la sous-section 2.8.3, on démontre la Proposition 2.8.1.

2.8.1 Définition, estimation, asymptotique

Le temps de retard $\tau(v_-,x_-)$ est défini pour tout $(v_-,x_-)\in\mathcal{D}(S)$ par

$$\begin{aligned}\tau(v_-,x_-)&=\frac{v_-\circ x_- - a(v_-,x_-)\circ b(v_-,x_-)}{|v_-|}\\ &=\frac{-v_-\circ b_{sc}(v_-,x_-)-x_-\circ a_{sc}(v_-,x_-)}{|v_-|^2}\\ &\quad-\frac{a_{sc}(v_-,x_-)\circ b_{sc}(v_-,x_-)}{|v_-|^2}.\end{aligned}\qquad(2.8.1)$$

Commençons par rappeler le sens physique de $\tau(v_-,x_-)$. Soit $(v_-,x_-)\in\mathcal{D}(S)$. Désignons par $x(t)$ la solution de (2.1.1) vérifiant les conditions initiales (2.1.4). Pour un réel $R\geq|x(0)|$, on pose

$$\begin{aligned}T(v_-,x_-,R)&=\sup\{t\in[0,+\infty[\ \mid\ \forall u\in[0,t]\ |x(u)|\leq R\}\\ &\quad-\inf\{t\in]-\infty,0]\ \mid\ \forall u\in[0,t]\ |x(u)|\leq R\}.\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $R \geq |x(0)|$, $T(v_-, x_-, R)$ désigne la durée pendant laquelle la solution $x(t)$ appartient à la boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon R, cette durée étant calculée relativement au temps $t = 0$. Alors on a

$$\tau(v_-, x_-) = \lim_{R\to+\infty} \left(T(v_-, x_-, R) - \frac{2R}{|v_-|} \right),\ (v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S). \qquad (2.8.2)$$

Remarquons que si $V \equiv 0$ et $B \equiv 0$, alors $\tau(v_-, x_-) = 0$ pour tout $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$.

En utilisant la définition du temps de retard donnée par (2.8.1), et en utilisant les Théorèmes 2.3.1, 2.3.2, nous obtenons le Théorème suivant qui donne une estimation du temps de retard τ dans le cas d'une diffusion aux petits angles.

Théorème 2.8.1. *Supposons les conditions* (2.1.2)-(2.1.3) *vérifiées. Soient* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ *et* $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$, $0 < r \leq 1$, $r < c/\sqrt{2}$. *Soit* $s \in]0, c[$ *tel que* $s \geq s_2(c, n, \beta_1, \beta_2, \alpha, |x|, r)$, *où* s_2 *est défini à la fin de la section 2.3. Alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{s}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} \tau(s\theta, x) - \frac{1}{s^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \circ \nabla V(\eta\theta + x) d\eta - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(B(\eta\theta + x) s\theta \right) d\eta \right) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon_b(c, n, \beta_1, \tilde{\beta}, \alpha, s, |x|, r)}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} + C_{c,n,\beta_0,\beta_1,\alpha,|x|} \sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}} \qquad (2.8.3) \\
&+ \frac{|x| \varepsilon_a(c, n, \beta_1, \tilde{\beta}, \alpha, s, |x|, r)}{s} + \frac{8\sqrt{2}\xi_-(c, n, \beta_1, \alpha, s, |x|, r, 0)\beta_1 n}{s^2 \alpha (1 + |x|/\sqrt{2})^\alpha} \\
&+ \frac{2\xi_-(c, n, \beta_1, \alpha, s, |x|, r, 0) \varepsilon_a(c, n, \beta_1, \tilde{\beta}, \alpha, s, |x|, r)}{s},
\end{aligned}$$

où C *est la constante apparaissant dans* (2.3.14) *et* ε_a, ε_b, ξ_- *sont définis par* (2.2.25), (2.2.26), (2.2.16).

Le Théorème 2.8.1 donne, en particulier, une asymptotique du temps de retard lorsque c, β_1, β_2, α, n, $\hat{v}_-$, x_- sont fixés (où $\hat{v}_- = v_-/|v_-|$) et $|v_-|$ croît ou, e.g., lorsque c, β_1, β_2, α, n, v_-, $\hat{x}_-$ sont fixés et $|x_-|$ croît. En particulier, du Théorème 2.8.1, et de (2.2.25), (2.2.26), (2.2.16), on a

Théorème 2.8.2. *Soient* $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. *Supposons les conditions* (2.1.2)-(2.1.3) *vérifiées. Alors on a*

$$\lim_{\substack{s\to c \\ s<c}} \frac{s^3}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} \tau(s\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \circ \nabla V(\eta\theta + x) d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(B(\eta\theta + x)\theta \right) d\eta. \qquad (2.8.4)$$

2.8.2 Détermination du champ de force

Sous les conditions (2.1.2)-(2.1.3) et pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, on note $W(V, B, \theta, x)$ le réel

$$W(V, B, \theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \circ \nabla V(\eta\theta + x)d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(B(\eta\theta + x)\theta\right)d\eta \tag{2.8.5}$$

($W(V, B, \theta, x)$ est le membre de droite de (2.8.4)). On s'intéresse à la question de la reconstruction de V, B à partir de $W(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, i.e. à la question de la reconstruction de V, B à partir de l'asymptotique aux hautes énergies trouvée pour le temps de retard (voir (2.8.4)). Avant d'énoncer la Proposition 2.8.1 qui répond à cette question, nous introduisons de nouvelles fonctions W_1, W_2 et $\tilde{W}_2$.

Pour V satisfaisant (2.1.2) et pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, on définit le réel $W_1(V, \theta, x)$ par

$$W_1(V, \theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \circ \nabla V(\eta\theta + x)d\eta\ ; \tag{2.8.6}$$

et pour $B \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ satisfaisant (2.1.3) et pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, on définit le réel $W_2(B, \theta, x)$ par

$$W_2(B, \theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(B(\eta\theta + x)\theta)d\eta. \tag{2.8.7}$$

Les relations entre les fonctions W, W_1 et W_2 sont

$$\begin{aligned} 2W_1(V, \theta, x) &= W(V, B, \theta, x) + W(V, B, -\theta, x), \\ -2W_2(B, \theta, x) &= W(V, B, \theta, x) - W(V, B, -\theta, x), \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

Sous les conditions (2.1.3), on définit la fonction $\tilde{W}_2 : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{W}_2(x, y) = -2W_2(B, \frac{y}{|y|}, x - \frac{x \circ y}{|y|^2}y),\ \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}). \tag{2.8.9}$$

Sous les conditions (2.1.3), on a $\tilde{W}_2 \in C^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}), \mathbb{R})$ et

$$\tilde{W}_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(B(\eta y + x)y)d\eta,\ \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}). \tag{2.8.10}$$

Nous pouvons désormais énoncer la Proposition 2.8.1.

Proposition 2.8.1. *Sous les conditions* (2.1.2)-(2.1.3)*, on a :*

1. *le réel $W(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique V, et on dispose de l'égalité suivante*

$$PV(\theta, x) = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{q} W_1(V, \theta, qx) dq, \tag{2.8.11}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $x \neq 0$;

2. *si $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, le réel $W(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ détermine de manière unique B et on dispose des égalités suivantes*

$$\text{si } n = 2,\ PB_{1,2}(\theta, q\theta^\perp) = -\frac{1}{q} W_2(B, \theta, q\theta^\perp) \tag{2.8.12}$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ où $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$;

$$\text{si } n \geq 2,\ PB_{i,k}(\theta, x) = -\int_1^{+\infty} \left[\theta_k \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_i}(qx, \theta) - \theta_i \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_k}(qx, \theta)\right] dq, \tag{2.8.13}$$

pour tout $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, où i, k sont deux entiers distincts compris entre 1 et n, et $\mathcal{V}_{i,k}$ est définie par (2.1.15) ;

3. *si $B \notin \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, le réel $W(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ ne détermine pas de manière unique B.*

Remarque 2.8.1. Si $n = 2$, on remarque que $C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) = \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, en dimension $n = 2$, tout champ $B \in C^1(\mathbb{R}^2, A_2(\mathbb{R}))$ est magnétique.

En tenant compte du Théorème 2.8.2, de la Proposition 2.8.1 et des égalités (2.8.8) et de la définition donnée par (2.8.9), et en tenant compte aussi des formules d'inversion de la transformée de rayons X, P, (voir annexe, section A.3, formule (A.3.10)), on obtient que l'asymptotique aux hautes énergies trouvée pour le temps de retard détermine de manière unique le potentiel scalaire V et détermine de manière unique le champ B si B est magnétique (i.e. $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$), mais qu'elle ne détermine pas de manière unique B si $B \notin \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$ et $n \geq 3$.

2.8.3 Preuve de la Proposition 2.8.1

On commence par démontrer le premier item. Pour cela, compte tenu des propriétés d'inversion de la transformée de rayons X (voir section A.3), il suffit de démontrer (2.8.11). Soit $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $x \neq 0$. On considère $\phi_{\theta,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, défini par

$$\phi_{\theta,x}(q) = PV(\theta, qx) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\eta\theta + qx) d\eta \tag{2.8.14}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. Sous les conditions (2.1.2), on a $\phi_{\theta,x} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\frac{d\phi_{\theta,x}}{dq}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \circ \nabla V(\eta\theta + qx) d\eta, \tag{2.8.15}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. De (2.1.2), on a

$$|V(\eta\theta + qx)| \leq \beta_0 (1 + \sqrt{\eta^2 + |qx|^2})^{-\alpha} \leq \beta_0 2^{\frac{\alpha}{2}} (1 + |\eta| + |qx|)^{-\alpha},$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, ce qui implique $|\phi_{\theta,x}(q)| \leq \beta_0 2^{\frac{\alpha+2}{2}} \frac{1}{\alpha - 1}(1 + |qx|)^{-\alpha+1}$, et

$$|\phi_{\theta,x}(q)| \to 0, \text{ quand } |q| \to +\infty. \tag{2.8.16}$$

De (2.8.14)-(2.8.16), on obtient

$$PV(\theta, x) = \phi_{\theta,x}(1) = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} (qx) \circ \nabla V(\eta\theta + qx) d\eta. \tag{2.8.17}$$

L'égalité (2.8.11) se déduit de (2.8.17) et (2.8.6)

Démontrons maintenant le deuxième item. Pour cela, compte tenu des propriétés d'inversion de la transformée de rayons X (voir section A.3), il suffit de démontrer (2.8.13).

Sous les conditions (2.1.2) et de (2.8.10), on a

$$\frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_l}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{l,j}(\eta y + x) d\eta y_j + \sum_{m,j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_{m,j}}{\partial x_l}(\eta y + x) d\eta x_m y_j, \tag{2.8.18}$$

pour tout $(y, x) \in (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, $l = 1 \ldots n$.

Soient i et k deux entiers distincts compris entre 1 et n. Soit $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k}$. Comme $B(x')$ est une matrice antisymétrique pour tout $x' \in \mathbb{R}^n$, et comme $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k}$, de (2.8.18) on obtient

$$\begin{aligned} \theta_k \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_i}(x, \theta) - \theta_i \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_k}(x, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(\eta\theta + x) d\eta \qquad (2.8.19) \\ + \sum_{j=1}^{n} \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) d\eta x_j \theta_i \theta_k &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_k}(\eta\theta + x) d\eta x_j \theta_i^2 \Bigg] \\ + \sum_{j=1}^{n} \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) d\eta x_j \theta_k^2 &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_k}(\eta\theta + x) d\eta x_j \theta_i \theta_k \Bigg]. \end{aligned}$$

En remplaçant θ_i^2 par $1 - \theta_k^2$ dans (2.8.19) et en remplaçant θ_k^2 par $1 - \theta_i^2$ dans

(2.8.19), on obtient

$$\theta_k \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_i}(x,\theta) - \theta_i \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_k}(x,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(\eta\theta + x)d\eta \tag{2.8.20}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} x_j\theta_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\theta_i \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) + \theta_k \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_k}(\eta\theta + x)\right] d\eta$$
$$- \sum_{j=1}^{n} x_j\theta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\theta_i \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) + \theta_k \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_k}(\eta\theta + x)\right] d\eta$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} x_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) - \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_k}(\eta\theta + x)\right] d\eta.$$

On remarque que

$$\theta_i \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) + \theta_k \frac{\partial B_{j,i}}{\partial x_k}(\eta\theta + x) = \frac{d}{d\eta} B_{j,i}(\eta\theta + x), \tag{2.8.21}$$
$$\theta_i \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_i}(\eta\theta + x) + \theta_k \frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_k}(\eta\theta + x) = \frac{d}{d\eta} B_{j,k}(\eta\theta + x), \tag{2.8.22}$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ (on rappelle que $(\theta, x) \in \mathcal{V}_{i,k}$). De (2.8.20)-(2.8.22) et comme $B \in \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\theta_k \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_i}(x,\theta) - \theta_i \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_k}(x,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(\eta\theta + x)d\eta + \sum_{j=1}^{n} x_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} B_{i,k}(\eta\theta + x)d\eta. \tag{2.8.23}$$

On considère la fonction $\tilde{W}_{2x,\theta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{W}_{2x,\theta}(q) = q \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(qx + \eta\theta)d\eta, \tag{2.8.24}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. Sous les conditions (2.1.3), $\tilde{W}_{2x,\theta} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\frac{d\tilde{W}_{2x,\theta}}{dq}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(qx + \eta\theta)d\eta + q \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} B_{i,k}(\eta\theta + qx)d\eta, \tag{2.8.25}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. De (2.8.25) et (2.8.23), on a

$$\theta_k \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_i}(qx,\theta) - \theta_i \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial x_k}(qx,\theta) = \frac{d\tilde{W}_{2x,\theta}}{dq}(q), \tag{2.8.26}$$

De (2.1.3),

$$\begin{aligned} |\tilde{W}_{2x,\theta}(q)| &\leq |q|\beta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |qx + \eta\theta|)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\leq \beta_1 |q| 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |q||x| + |\eta|)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\leq \beta_1 \frac{|q| 2^{\frac{\alpha+3}{2}}}{\alpha(1 + |q||x|)^{\alpha}} \leq \beta_1 \frac{2^{\frac{\alpha+3}{2}}}{\alpha |x| (1 + |q||x|)^{\alpha-1}}, \end{aligned} \tag{2.8.27}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. De (2.8.27), on a $\tilde{W}_{2x,\theta}(q) \to 0$ quand $|q| \to +\infty$, ce qui avec (2.8.26) et (2.8.24) donne (2.8.13).

Pour démontrer le troisième item, il suffit d'exhiber un champ B non nul vérifiant (2.1.3) pour lequel $W_2(B, \theta, x) = 0$ pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, où W_2 est défini par (2.8.7). On considère le cas $n \geq 3$ (voir Remarque 2.8.1 et le deuxième item de la Proposition 2.8.1). Considérons par exemple le champ $B \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ défini par

$$B_{1,2}(y) = \frac{y_1 y_3}{h(|y|)},\ B_{1,3}(y) = \frac{-y_1 y_2}{h(|y|)},\ B_{2,3}(y) = \frac{y_1^2}{h(|y|)}, \tag{2.8.28}$$

$$B_{j,k}(y) = 0,\ \text{pour tout } j, k = 1 \dots n,\ j \notin \{1, 2, 3\}, \tag{2.8.29}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, où h est la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1+t^2)^\beta$, $t \in [0, +\infty[$, β étant une constante réelle positive vérifiant $\beta > \frac{\alpha+3}{2}$. Alors B vérifie les conditions (2.1.3) ; et pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ $(\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n))$, on a

$$W_2(B, \theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(B(\eta\theta + x)\theta) d\eta = (\bar{x} \times \bar{\theta}) \circ w(\theta, x), \tag{2.8.30}$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ et

$$\begin{aligned} w(\theta, x) \ &= \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} B_{2,3}(\eta\theta + x) d\eta, - \int_{-\infty}^{+\infty} B_{1,3}(\eta\theta + x) d\eta, \right. \\ &\qquad \left. \int_{-\infty}^{+\infty} B_{1,2}(\eta\theta + x) d\eta \right). \end{aligned} \tag{2.8.31}$$

Comme $B_{1,2}(\eta\theta + x) = \frac{(\eta\theta_1 + x_1)(\eta\theta_3 + x_3)}{h(\sqrt{\eta^2 + |x|^2})}$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{1,2}(\eta\theta + x) d\eta \ &= \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2}{h(\sqrt{\eta^2 + |x|^2})} d\eta \theta_1 \right) \theta_3 \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(\sqrt{\eta^2 + |x|^2})} d\eta x_1 \right) x_3. \end{aligned}$$

De la même manière on calcule la deuxième et la troisième composantes de $w(\theta, x)$ et on obtient

$$w(\theta, x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2}{h(\sqrt{\eta^2 + |x|^2})} d\eta \theta_1 \right) \bar{\theta} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(\sqrt{\eta^2 + |x|^2})} d\eta x_1 \right) \bar{x},$$

ce qui, avec (2.8.30), prouve que $W_2(B, \theta, x) = 0$. $\square$

Chapitre 3

Problèmes inverses à énergie fixée

N. B. : les sections 3.1-3.6 de ce chapitre sont extraites de [Jol07b]. Dans la section 3.7, on complète l'article [Jol07b] en présentant une preuve de la Proposition 3.3.2 et des formules (3.3.9)-(3.3.10) formulées dans la Proposition 3.3.1.

3.1 Introduction

3.1.1 Relativistic Newton equation

Consider the Newton-Einstein equation in a static electromagnetic field in an open subset Ω of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} &\dot{p} = -\nabla V(x) + \tfrac{1}{c}B(x)\dot{x}, \\ &p = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{|\dot{x}|^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

where $x = x(t)$ is a C^1 function with values in Ω, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, and $V \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ (i.e. there exists $\tilde{V} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ such that $\tilde{V}$ restricted to $\bar{\Omega}$ is equal to V), $B \in \mathcal{F}_{mag}(\bar{\Omega})$ where $\mathcal{F}_{mag}(\bar{\Omega})$ is the family of magnetic fields on $\bar{\Omega}$, i.e. $\mathcal{F}_{mag}(\bar{\Omega}) = \{B' \in C^1(\bar{\Omega}, A_n(\mathbb{R})) \mid B' = (B'_{i,k}),\ \frac{\partial}{\partial x_i}B'_{k,l}(x) + \frac{\partial}{\partial x_l}B'_{i,k}(x) + \frac{\partial}{\partial x_k}B'_{l,i}(x) = 0,\ x \in \bar{D},\ i,k,l = 1\ldots n\}$ and $A_n(\mathbb{R})$ denotes the space of $n \times n$ real antisymmetric matrices.

By $\|V\|_{C^2,\Omega}$ we denote the supremum of the set $\{|\partial_x^j V(x)| \mid x \in \Omega,$ $j = (j_1, .., j_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n j_i \leq 2\}$ and by $\|B\|_{C^1,\Omega}$ we denote the supremum of the set $\{|\partial_x^j B_{i,k}(x)| \mid x \in \Omega,\ i,k = 1\ldots n,\ j = (j_1, .., j_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n j_i \leq 1\}$.

The equation (3.1.1) is an equation for $x = x(t)$ and is the equation of motion in $\mathbb{R}^n$ of a relativistic particle of mass $m = 1$ and charge $e = 1$ in an external electromagnetic field described by V and B (see [Ein07] and, for example, Section 17 of [LL71]). In this equation x is the position of the particle, p is its impulse, t is the time and c is the speed of light.

For the equation (3.1.1) the energy

$$E = c^2\sqrt{1+\frac{|p(t)|^2}{c^2}} + V(x(t)) \tag{3.1.2}$$

is an integral of motion. We denote by B_c the euclidean open ball whose radius is c and whose centre is 0.

In this paper we consider the equation (3.1.1) in two situations. We study equation (3.1.1) when

$$\begin{array}{l}\Omega = D \text{ where } D \text{ is a bounded strictly convex in the strong sense}\\ \text{open domain of } \mathbb{R}^n, n\geq 2, \text{with } C^2 \text{ boundary.}\end{array} \tag{3.1.3}$$

And we study equation (3.1.1) when

$$\begin{array}{l}\Omega = \mathbb{R}^n \text{ and } |\partial_x^{j_1} V(x)| \leq \beta_{|j_1|}(1+|x|)^{-\alpha-|j_1|},\ x\in\mathbb{R}^n,\ n\geq 2,\\ |\partial_x^{j_2} B_{i,k}(x)| \leq \beta_{|j_2|+1}(1+|x|)^{-\alpha-1-|j_2|},\ x\in\mathbb{R}^n,\end{array} \tag{3.1.4}$$

for $|j_1|\leq 2, |j_2|\leq 1,\ i,k=1\ldots n$ and some $\alpha>1$ (here j is the multiindex $j\in\mathbb{N}^n$, $|j|=\sum_{i=1}^n j_i$ and $\beta_{|j|}$ are positive real constants).

For the equation (3.1.1) under condition (3.1.3), we consider boundary data. For equation (3.1.1) under condition (3.1.4), we consider scattering data.

3.1.2 Boundary data

For the equation (3.1.1) under condition (3.1.3), one can prove that at sufficiently large energy E (i.e. $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D))$, the solutions x at energy E have the following properties (see Properties (3.2.1) and (3.2.2) in Section 3.2 and see Section 3.6) :

$$\begin{array}{l}\text{for each solution } x(t) \text{ there are } t_1,t_2\in\mathbb{R}, t_1<t_2, \text{ such that}\\ x\in C^3([t_1,t_2],\mathbb{R}^n), x(t_1), x(t_2)\in\partial D, x(t)\in D \text{ for } t\in]t_1,t_2[,\\ x(s_1)\neq x(s_2) \text{ for } s_1,s_2\in[t_1,t_2], s_1\neq s_2;\end{array} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{array}{l}\text{for any two distinct points } q_0, q\in\bar{D}, \text{ there is one and only one solution}\\ x(t)=x(t,E,q_0,q) \text{ such that } x(0)=q_0, x(s)=q \text{ for some } s>0.\end{array} \tag{3.1.6}$$

Let (q_0,q) be two distinct points of ∂D. By $s_{V,B}(E,q_0,q)$ we denote the time at which $x(t,E,q_0,q)$ reaches q from q_0. By $k_{0,V,B}(E,q_0,q)$ we denote the velocity vector $\dot{x}(0,E,q_0,q)$. By $k_{V,B}(E,q_0,q)$ we denote the velocity vector $\dot{x}(s_{V,B}(E,q_0,q),E,q_0,q)$. We consider $k_{0,V,B}(E,q_0,q)$, $k_{V,B}(E,q_0,q)$, $q_0,q\in\partial D$, $q_0\neq q$, as the boundary value data.

Remark 3.1.1. For $q_0,q\in\partial D, q_0\neq q$, the trajectory of $x(t,E,q_0,q)$ and the trajectory of $x(t,E,q,q_0)$ are distinct, in general.

Note that in the present paper we always assume that the aforementioned real constant $E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, considered as function of $\|V\|_{C^2,D}$ and $\|B\|_{C^1,D}$, satisfies

$$E(\lambda_1, \lambda_2, D) \leq E(\lambda_1', \lambda_2', D) \text{ if } \lambda_1 \leq \lambda_1' \text{ and } \lambda_2 \leq \lambda_2', \tag{3.1.7}$$

for $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2' \in [0, +\infty[$.

3.1.3 Scattering data

For the equation (3.1.1) under condition (3.1.4), the following is valid (see [Yaj82]) : for any $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n,\ v_- \neq 0$, the equation (3.1.1) has a unique solution $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ such that

$$x(t) = v_- t + x_- + y_-(t), \tag{3.1.8}$$

where $\dot y_-(t) \to 0,\ y_-(t) \to 0,$ as $t \to -\infty$; in addition for almost any $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n,\ v_- \neq 0,$

$$x(t) = v_+ t + x_+ + y_+(t), \tag{3.1.9}$$

where $v_+ \neq 0$, $|v_+| < c$, $v_+ = a(v_-, x_-)$, $x_+ = b(v_-, x_-)$, $\dot y_+(t) \to 0$, $y_+(t) \to 0$, as $t \to +\infty$.

For an energy $E > c^2$, the map $S_E : \mathbb{S}_E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}_E \times \mathbb{R}^n$ (where $\mathbb{S}_E = \{v \in B_c \mid |v| = c\sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{E}\right)^2}\}$) given by the formulas

$$v_+ = a(v_-, x_-),\ x_+ = b(v_-, x_-), \tag{3.1.10}$$

is called the scattering map at fixed energy E for the equation (3.1.1) under condition (3.1.4). By $\mathcal{D}(S_E)$ we denote the domain of definition of S_E. The data $a(v_-, x_-)$, $b(v_-, x_-)$ for $(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S_E)$ are called the scattering data at fixed energy E for the equation (3.1.1) under condition (3.1.4).

3.1.4 Inverse scattering and boundary value problems

In the present paper, we consider the following inverse boundary value problem at fixed energy for the equation (3.1.1) under condition (3.1.3) :

Problem 1 : given $k_{V,B}(E, q_0, q),\ k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ for all $q_0, q \in \partial D$, $q_0 \neq q,$ at fixed sufficiently large energy $E,$ find V and B.

The main results of the present work include the following theorem of uniqueness for Problem 1.

Theorem 3.1.1. *At fixed $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, the boundary data $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $(q_0, q) \in \partial D \times \partial D$, $q_0 \neq q$, uniquely determine V, B.*

At fixed $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, the boundary data $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$, $(q_0, q) \in \partial D \times \partial D$, $q_0 \neq q$, uniquely determine V, B.

Theorem 3.1.1 follows from Theorem 3.3.1 given in Section 3.3.

In the present paper, we also consider the following inverse scattering problem at fixed energy for the equation (3.1.1) under condition (3.1.4) :

$$\textbf{Problem } 2: \text{ given } S_E \text{ at fixed energy } E, \text{ find } V \text{ and } B.$$

The main results of the present work include the following theorem of uniqueness for Problem 2.

Theorem 3.1.2. *Let $\lambda \in \mathbb{R}^+$ and let D be a bounded strictly convex in the strong sense open domain of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary. Let $V_1, V_2 \in C_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $B_1, B_2 \in C_0^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n)$, $\max(\|V_1\|_{C^2,D}, \|V_2\|_{C^2,D}, \|B_1\|_{C^1,D}, \|B_2\|_{C^1,D}) \leq \lambda$, and $\operatorname{supp}(V_1) \cup \operatorname{supp}(V_2) \cup \operatorname{supp}(B_1) \cup \operatorname{supp}(B_2) \subseteq D$. Let S_E^μ be the scattering map at fixed energy E subordinate to (V_μ, B_μ) for $\mu = 1, 2$. Then there exists a nonnegative real constant $E(\lambda, D)$ such that for any $E > E(\lambda, D)$, $(V_1, B_1) \equiv (V_2, B_2)$ if and only if $S_E^1 \equiv S_E^2$.*

Theorem 3.1.2 follows from Theorem 3.1.1, (3.1.7) and Proposition 3.2.1 of Section 3.2.

Remark 3.1.2. Note that for $V \in C_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, if $E < c^2 + \sup\{V(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ then S_E does not determine uniquely V.

Remark 3.1.3. Theorems 1.1 and 1.2 give uniqueness results. In this paper we do not prove and do not obtain stability results for Problem 1 and for Problem 2.

3.1.5 Historical remarks

An inverse boundary value problem at fixed energy and at high energies was studied in [GN83] for the multidimensional nonrelativistic Newton equation (without magnetic field) in a bounded open strictly convex domain. In [GN83] results of uniqueness and stability for the inverse boundary value problem at fixed energy are derived from results for the problem of determining an isotropic Riemannian metric from its hodograph (for this geometrical problem, see [MR78], [Bey79] and [BG80]).

Novikov [Nov99] studied inverse scattering for nonrelativistic multidimensional Newton equation (without magnetic field). Novikov [Nov99] gave, in particular, a connection between the inverse scattering problem at fixed energy and Gerver-Nadirashvili's inverse boundary value problem at fixed energy. Developing the approach of [GN83] and [Nov99], the author [Jol06] studied an inverse boundary problem and inverse scattering problem for the multidimensional relativistic Newton equation (without magnetic field) at fixed energy. In [Jol06] results of uniqueness and stability are obtained.

Inverse scattering at high energies for the relativistic multidimensional Newton equation was studied by the author (see [Jol05a], [Jol05b]).

As regards analogs of Theorems 3.1.1, 3.1.2 and Proposition 3.2.1 for the case $B \equiv 0$ for nonrelativistic quantum mechanics see [Nov88], [NSU88], [Nov05] and further references therein. As regards an analog of Theorem 3.1.2 for the case $B \equiv 0$ for relativistic quantum mechanics see [Iso97]. As regards analogs of Theorems 3.1.1, 3.1.2 for the case $B \not\equiv 0$ for nonrelativistic quantum mechanics, see [ER95], [NSU95] and further references given therein.

As regards results given in the literature on inverse scattering in quantum mechanics at high energy limit see references given in [Jol05b].

3.1.6 Structure of the paper

The paper is organized as follows. In Section 3.2, we give some properties of boundary data and scattering data and we connect the inverse scattering problem at fixed energy to the inverse boundary value problem at fixed energy. In Section 3.3, we give, actually, a proof of Theorem 1.1 (based on Theorem 3.1 formulated in Section 3). Section 3.4 is devoted to the proof of Lemma 3.3.1 and Theorem 3.3.1 formulated in Section 3.3. Section 3.5 is devoted to the proof of Lemma 3.2.1 and Proposition 3.3.1 formulated in Section 3.2 and in Section 3.3. Section 3.6 is devoted to the proof of Properties (3.2.1) and (3.2.2).

Acknowledgement. This work was fulfilled in the framework of Ph. D. thesis research under the direction of R.G. Novikov.

3.2 Scattering data and boundary value data

3.2.1 Properties of the boundary value data

Let D be a bounded strictly convex open subset of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with C^2 boundary.

At fixed sufficiently large energy E (i.e. $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D) \geq c^2 + \sup_{x \in \bar{D}} V(x)$) solutions $x(t)$ of the equation (3.1.1) under condition (3.1.3) have the following properties (see Section 3.6) :

$$\begin{aligned}
&\text{for each solution } x(t) \text{ there are } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 < t_2, \text{ such that} \\
&x \in C^3([t_1, t_2], \mathbb{R}^n), x(t_1), x(t_2) \in \partial D, x(t) \in D \text{ for } t \in]t_1, t_2[, \\
&x(s_1) \neq x(s_2) \text{ for } s_1, s_2 \in [t_1, t_2], s_1 \neq s_2, \dot{x}(t_1) \circ N(x(t_1)) < 0 \\
&\text{and } \dot{x}(t_2) \circ N(x(t_2)) > 0, \text{ where } N(x(t_i)) \text{ is the unit outward} \\
&\text{normal vector of } \partial D \text{ at } x(t_i) \text{ for } i = 1, 2;
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
&\text{for any two points } q_0, q \in \bar{D}, q \neq q_0, \text{ there is one and only one solution} \\
&x(t) = x(t, E, q_0, q) \text{ such that } x(0) = q_0, x(s) = q \text{ for some } s > 0; \\
&\dot{x}(0, E, q_0, q) \in C^1((\bar{D} \times \bar{D}) \backslash \bar{G}, \mathbb{R}^n), \text{ where } \bar{G} \text{ is the diagonal in } \bar{D} \times \bar{D};
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

where $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$ (and where by "$\dot{x}(0,E,q_0,q) \in C^1((\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G},\mathbb{R}^n)$" we mean that $\dot{x}(0,E,q_0,q)$ is the restriction to $(\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G}$ of a function which belongs to $C^1((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\backslash\Delta)$ where Δ is the diagonal of $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$).

Remark 3.2.1. If $B \in C^1(\bar{D}, A_n(\mathbb{R}))$ and $B \notin \mathcal{F}_{mag}(\bar{D})$ (where $A_n(\mathbb{R})$ denotes the space of $n\times n$ real antisymmetric matrices), then at fixed energy $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ solutions $x(t)$ of equation (3.1.1) under condition (3.1.3) also have properties (3.2.1), (3.2.2) (see Section 3.6).

We remind that the aforementioned real constant $E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, considered as function of $\|V\|_{C^2,D}$ and $\|B\|_{C^1,D}$, satisfies (3.1.7). In addition, real constant $E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ has the following property : for any C^2 continuation $\tilde{V}$ of V on $\mathbb{R}^n$, and for any $\tilde{B} \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ such that $\tilde{B} \equiv B$ on $\bar{D}$, one has

$$E(\|\tilde{V}\|_{C^2,D_{x_0,\varepsilon}}, \|\tilde{B}\|_{C^1,D_{x_0,\varepsilon}}, D_{x_0,\varepsilon}) \to E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D),\ \text{as } \varepsilon \to 0, \tag{3.2.3}$$

where $D_{x_0,\varepsilon} = \{x_0 + (1+\varepsilon)(x-x_0) \mid x \in D\}$ for any $x_0 \in D$ and $\varepsilon > 0$ (note that $D_{x_0,\varepsilon}$ is a bounded, open, strictly convex (in the strong sense) domain of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary).

Let $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$. Consider the solution $x(t,E,q_0,q)$ from (3.2.2) for $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$. We define vectors $k_{V,B}(E,q_0,q)$ and $k_{0,V,B}(E,q_0,q)$ by

$$\begin{aligned} k_{V,B}(E,q_0,q) &= \dot{x}(s_{V,B}(E,q_0,q),E,q_0,q), \\ k_{0,V,B}(E,q_0,q) &= \dot{x}(0,E,q_0,q), \end{aligned}$$

where we define $s = s_{V,B}(E,q_0,q)$ as the root of the equation

$$x(s,E,q_0,q) = q, \quad s > 0.$$

For $q_0 = q \in \bar{D}$, we put $s_{V,B}(E,q_0,q) = 0$.

Note that

$$\begin{aligned} |k_{0,V,B}(E,q_0,q)| &= c\sqrt{1-\left(\tfrac{E-V(q_0)}{c^2}\right)^{-2}}, \\ |k_{V,B}(E,q_0,q)| &= c\sqrt{1-\left(\tfrac{E-V(q)}{c^2}\right)^{-2}}, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

for $(q,q_0) \in (\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G}$.

Using Properties (3.2.1) and (3.2.2), we obtain

Lemma 3.2.1. *At fixed $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, we have that $s_{V,B}(E,q_0,q) \in C(\bar{D}\times\bar{D},\mathbb{R})$, $s_{V,B}(E,q_0,q) \in C^1((\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G},\mathbb{R})$ and $k_{V,B}(E,q_0,q) \in C^1((\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G},\mathbb{R}^n)$.*

We consider $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$, $q_0, q \in \partial D$, $q_0 \neq q$ as the boundary value data.

Remark 3.2.2. Note that if $x(t)$ is solution of (3.1.1) under condition (3.1.3), then $x(-t)$ is solution of (3.1.1) with B replaced by $-B \in \mathcal{F}_{mag}(\bar{D})$ under condition (3.1.3). Hence the following equalities are valid : at fixed $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$,

$$k_{0,V,B}(E, q_0, q) = -k_{V,-B}(E, q, q_0), \tag{3.2.5}$$
$$k_{V,B}(E, q_0, q) = -k_{0,V,-B}(E, q, q_0), \tag{3.2.6}$$
$$s_{V,B}(E, q_0, q) = s_{V,-B}(E, q, q_0), \tag{3.2.7}$$

for $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$.

3.2.2 Properties of the scattering operator

For equation (3.1.1) under condition (3.1.4), the following is valid (see [Yaj82]) : for any $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$, the equation (3.1.1) under condition (3.1.4) has a unique solution $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ such that

$$x(t) = v_- t + x_- + y_-(t), \tag{3.2.8}$$

where $\dot{y}_-(t) \to 0$, $y_-(t) \to 0$, as $t \to -\infty$; in addition for almost any $(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n$, $v_- \neq 0$,

$$x(t) = v_+ t + x_+ + y_+(t), \tag{3.2.9}$$

where $v_+ \neq 0$, $|v_+| < c$, $v_+ = a(v_-, x_-)$, $x_+ = b(v_-, x_-)$, $\dot{y}_+(t) \to 0$, $y_+(t) \to 0$, as $t \to +\infty$.

The map $S : B_c \times \mathbb{R}^n \to B_c \times \mathbb{R}^n$ given by the formulas

$$v_+ = a(v_-, x_-),\ x_+ = b(v_-, x_-) \tag{3.2.10}$$

is called the scattering map for the equation (3.1.1) under condition (3.1.4). The functions $a(v_-, x_-)$, $b(v_-, x_-)$ are called the scattering data for the equation (3.1.1) under condition (3.1.4).

By $\mathcal{D}(S)$ we denote the domain of definition of S ; by $\mathcal{R}(S)$ we denote the range of S (by definition, if $(v_-, x_-) \in \mathcal{D}(S)$, then $v_- \neq 0$ and $a(v_-, x_-) \neq 0$).

The map S has the following simple properties (see [Yaj82]) : $\mathcal{D}(S)$ is an open set of $B_c \times \mathbb{R}^n$ and $\mathrm{Mes}((B_c \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathcal{D}(S)) = 0$ for the Lebesgue measure on $B_c \times \mathbb{R}^n$ induced by the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; the map $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{R}(S)$ is continuous and preserves the element of volume ; for any $(v, x) \in \mathcal{D}(S)$, $a(v, x)^2 = v^2$.

For $E > c^2$, the map S restricted to

$$\Sigma_E = \{(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n \mid |v_-| = c\sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{E}\right)^2}\}$$

is the scattering operator at fixed energy E and is denoted by S_E.

We will use the fact that the map S is uniquely determined by its restriction to $\mathcal{M}(S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{M}$, where

$$\mathcal{M} = \{(v_-, x_-) \in B_c \times \mathbb{R}^n | v_- \neq 0, v_- x_- = 0\}.$$

This observation is based on the fact that if $x(t)$ satisfies (3.1.1), then $x(t+t_0)$ also satisfies (3.1.1) for any $t_0 \in \mathbb{R}$. In particular, the map S at fixed energy E is uniquely determined by its restriction to $\mathcal{M}_E(S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{M}_E$, where $\mathcal{M}_E = \Sigma_E \cap \mathcal{M}$.

3.2.3 Relation between scattering data and boundary value data

Assume that

$$V \in C_0^2(\bar{D}, \mathbb{R}),\ B \in C_0^1(\bar{D}, A_n(\mathbb{R})),\ B \in \mathcal{F}_{mag}(\bar{D}). \tag{3.2.11}$$

We consider equation (3.1.1) under condition (3.1.3) and equation (3.1.1) under condition (3.1.4). We shall connect the boundary value data $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ for $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ and $(q, q_0) \in (\partial D \times \partial D) \backslash \partial G$, to the scattering data a, b.

Proposition 3.2.1. *Let $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$. Under condition* (3.2.11), *the following statement is valid : $s_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ given for all $(q, q_0) \in (\partial D \times \partial D) \backslash \partial G$, are determined uniquely by the scattering data $a(v_-, x_-)$, $b(v_-, x_-)$ given for all $(v_-, x_-) \in \mathcal{M}_E(S)$. The converse statement holds : $s_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{V,B}(E, q_0, q)$, $k_{0,V,B}(E, q_0, q)$ given for all $(q, q_0) \in (\partial D \times \partial D) \backslash \partial G$, determine uniquely the scattering data $a(v_-, x_-)$, $b(v_-, x_-)$ for all $(v_-, x_-) \in \mathcal{M}_E(S)$.*

Proof of Proposition 3.2.1. First of all we introduce functions χ, τ_- and τ_+ dependent on D.

For $(v, x) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^n$, $\chi(v, x)$ denotes the nonnegative number of points contained in the intersection of ∂D with the straight line parametrized by $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto tv + x$. As D is a strictly convex open subset of $\mathbb{R}^n$, $\chi(v, x) \leq 2$ for all $v, x \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Let $(v, x) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Assume that $\chi(v, x) \geq 1$. The real $\tau_-(v, x)$ denotes the smallest real number t such that $\tau_-(v, x)v + x \in \partial D$, and the real $\tau_+(v, x)$ denotes the greatest real number t such that $\tau_+(v, x)v + x \in \partial D$ (if $\chi(v, x) = 1$ then $\tau_-(v, x) = \tau_+(v, x)$).

Direct statement. Let $(q_0, q) \in (\partial D \times \partial D) \backslash \partial G$. Under conditions (3.2.11) and from (3.2.1) and (3.2.2), it follows that there exists an unique $(v_-, x_-) \in \mathcal{M}_E(S)$ such that

$$\begin{aligned}
&\chi(v_-, x_-) = 2,\\
&q_0 = x_- + \tau_-(v_-, x_-)v_-,\\
&q = b(v_-, x_-) + \tau_+(a(v_-, x_-), b(v_-, x_-))a(v_-, x_-).
\end{aligned}$$

In addition, $s_{V,B}(E,q_0,q) = \tau_+(a(v_-,x_-),b(v_-,x_-)) - \tau_-(v_-,x_-)$ and $k_{V,B}(E, q_0,q) = a(v_-,x_-)$ and $k_{0,V,B}(E,q_0,q) = v_-$.
Converse statement. Let $(v_-,x_-) \in \mathcal{M}_E(S)$. Under conditions (3.2.11), if $\chi(v_-, x_-) \le 1$ then $(a(v_-,x_-),b(v_-,x_-)) = (v_-,x_-)$.

Assume that $\chi(v_-,x_-) = 2$. Let

$$q_0 = x_- + \tau_-(v_-,x_-)v_-.$$

From (3.2.1) and (3.2.2) it follows that there is one and only one solution of the equation

$$k_{0,V,B}(E,q_0,q) = v_-,\ q \in \partial D,\ q \neq q_0. \tag{3.2.12}$$

We denote by $q(v_-,x_-)$ the unique solution of (3.2.12). Hence we obtain

$$\begin{aligned} a(v_-,x_-) = &\ k_{V,B}(E,q_0,q(v_-,x_-)),\\ b(v_-,x_-) = &\ q(v_-,x_-) - k_{V,B}(E,q_0,q(v_-,x_-))(s_{V,B}(E,q_0,q(v_-,x_-))\\ &+\tau_-(v_-,x_-)). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 is proved. □

For a more complete discussion about connection between scattering data and boundary value data, see [Nov99] considering the nonrelativistic Newton equation (without magnetic field).

3.3 Inverse boundary value problem

In this Section, Problem 1 of Introduction is studied.

3.3.1 Notations

For $x \in \bar{D}$, and for $E > V(x) + c^2$, we define

$$r_{V,E}(x) = c\sqrt{\left(\frac{E - V(x)}{c^2}\right)^2 - 1}.$$

At $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$ for $q_0, q \in \bar{D} \times \bar{D}$, $q_0 \neq q$, we define the vectors $\bar{k}_{V,B}(E,q_0,q)$ and $\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q)$ by

$$\begin{aligned} \bar{k}_{V,B}(E,q_0,q) &= \frac{k_{V,B}(E,q_0,q)}{\sqrt{1-\frac{|k_{V,B}(E,q_0,q)|^2}{c^2}}},\\ \bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q) &= \frac{k_{0,V,B}(E,q_0,q)}{\sqrt{1-\frac{|k_{0,V,B}(E,q_0,q)|^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

and $\bar{k}_{V,B}(E,q_0,q) = (\bar{k}^1_{V,B}(E,q_0,q),\ldots,\bar{k}^n_{V,B}(E,q_0,q))$, $\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q) =$

$(\bar{k}^1_{0,V,B}(E,q_0,q),\ldots,\bar{k}^n_{0,V,B}(E,q_0,q))$. Note that from (3.2.4), it follows that

$$\begin{aligned} |\bar{k}_{V,B}(E,q_0,q)| &= r_{V,E}(q), \\ |\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q)| &= r_{V,E}(q_0). \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

For $B \in \mathcal{F}_{mag}(\bar{D})$, let $\mathcal{F}_{pot}(D,B)$ be the set of C^1 magnetic potentials for the magnetic field B, i.e.

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{pot}(D,B) := \{\mathbf{A} \in C^1(\bar{D},\mathbb{R}^n) \mid B_{i,k}(x) = \tfrac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{A}_k(x) - \tfrac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{A}_i(x),\ x \in \bar{D}, \\ &i,k = 1\ldots n\}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

(The set $\mathcal{F}_{pot}(D,B)$ is not empty : take, for example, $\mathbf{A}(x) = -\int_0^1 sB(x_0 + s(x-x_0))(x-x_0)ds$, for $x \in \bar{D}$ and some fixed point x_0 of $\bar{D}$.)

3.3.2 Hamiltonian mechanics

Let $\mathbf{A} \in \mathcal{F}_{pot}(D,B)$. The equation (3.1.1) in D is the Euler-Lagrange equation for the Lagrangian L defined by $L(\dot{x},x) = -c^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} + c^{-1}\mathbf{A}(x)\circ \dot{x} - V(x)$, $\dot{x} \in B_c$ and $x \in D$, where $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$. The Hamiltonian H associated to the Lagrangian L by Legendre's transform (with respect to $\dot{x}$) is $H(P,x) = c^2\left(1 + c^{-2}|P - c^{-1}\mathbf{A}(x)|^2\right)^{1/2} + V(x)$ where $P \in \mathbb{R}^n$ and $x \in D$. Then equation (3.1.1) in D is equivalent to the Hamilton's equation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{\partial H}{\partial P}(P,x), \\ \dot{P} &= -\tfrac{\partial H}{\partial x}(P,x), \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

for $P \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$.

For a solution $x(t)$ of equation (3.1.1) in D, we define the impulse vector

$$P(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}} + c^{-1}\mathbf{A}(x(t)).$$

Further for $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$, and $t \in [0, s(E,q_0,q)]$, we consider

$$P(t,E,q_0,q) = \frac{\dot{x}(t,E,q_0,q)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t,E,q_0,q)|^2}{c^2}}} + c^{-1}\mathbf{A}(x(t,E,q_0,q)), \tag{3.3.5}$$

where $x(.,E,q_0,q)$ is the solution given by (3.2.2). From Maupertuis's principle (see [Arn78]), it follows that if $x(t)$, $t \in [t_1,t_2]$, is a solution of (3.1.1) in D with energy E, then $x(t)$ is a critical point of the functional $\mathcal{A}(y) = \int_{t_1}^{t_2}\left[r_{V,E}(y(t))|\dot{y}(t)| + c^{-1}\mathbf{A}(y(t))\circ\dot{y}(t)\right]dt$ defined on the set of the functions $y \in C^1([t_1,t_2],D)$, with boundary conditions $y(t_1) = x(t_1)$ and $y(t_2) = x(t_2)$. Note that for $q_0, q \in D$, $q_0 \neq q$, functional $\mathcal{A}$ taken along the trajectory of the solution $x(., E, q_0, q)$ given by (3.2.2) is equal to the reduced action $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}(q_0, q)$ from q_0 to q at fixed energy E for (3.3.4), where

$$\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}(q_0, q) = \begin{cases} 0, & \text{if } q_0 = q, \\ \int_0^{s(E,q_0,q)} P(s, E, q_0, q) \circ \dot{x}(s, E, q_0, q) ds, & \text{if } q_0 \neq q, \end{cases} \tag{3.3.6}$$

for $q_0, q \in \bar{D}$.

3.3.3 Properties of $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}$ at fixed and sufficiently large energy E

The following Propositions 3.3.1, 3.3.2 give properties of $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}$ at fixed and sufficiently large energy E.

Proposition 3.3.1. *Let $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$. The following statements are valid :*

$$\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}} \in C(\bar{D} \times \bar{D}, \mathbb{R}), \tag{3.3.7}$$
$$\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}} \in C^2((\bar{D} \times \bar{D})\backslash\bar{G}, \mathbb{R}), \tag{3.3.8}$$
$$\frac{\partial \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial x_i}(\zeta, x) = \bar{k}^i_{V,B}(E, \zeta, x) + c^{-1}\mathbf{A}_i(x), \tag{3.3.9}$$
$$\frac{\partial \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial \zeta_i}(\zeta, x) = -\bar{k}^i_{0,V,B}(E, \zeta, x) - c^{-1}\mathbf{A}_i(\zeta), \tag{3.3.10}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial \zeta_i \partial x_j}(\zeta, x) = -\frac{\partial \bar{k}^i_{0,V,B}}{\partial x_j}(E, \zeta, x) = \frac{\partial \bar{k}^j_{V,B}}{\partial \zeta_i}(E, \zeta, x), \tag{3.3.11}$$

for $(\zeta, x) \in (\bar{D} \times \bar{D})\backslash\bar{G}$, $\zeta = (\zeta_1, .., \zeta_n)$, $x = (x_1, .., x_n)$, and $i, j = 1 \ldots n$. In addition,

$$\max\left(\left|\frac{\partial \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial x_i}(\zeta, x)\right|, \left|\frac{\partial \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial \zeta_i}(\zeta, x)\right|\right) \leq M_1, \tag{3.3.12}$$
$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}}{\partial \zeta_i \partial x_j}(\zeta, x)\right| \leq \frac{M_2}{|\zeta - x|}, \tag{3.3.13}$$

for $(\zeta, x) \in (\bar{D} \times \bar{D})\backslash\bar{G}$, $\zeta = (\zeta_1, .., \zeta_n)$, $x = (x_1, .., x_n)$, and $i, j = 1 \ldots n$, and where M_1 and M_2 depend on V, B and D.

Proposition 3.3.1 is proved in Section 5.

Equalities (3.3.9) and (3.3.10) are known formulas of classical Hamiltonian mechanics (see Section 46 and further Sections of [Arn78]).

Proposition 3.3.2. *Let $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$. The map $\nu_{V,B,E}$: $\partial D \times D \to \mathbb{S}^{n-1}$, defined by*

$$\nu_{V,B,E}(\zeta, x) = -\frac{k_{V,B}(E, \zeta, x)}{|k_{V,B}(E, \zeta, x)|}, \ \textit{for } (\zeta, x) \in \partial D \times D, \tag{3.3.14}$$

has the following properties :

$$\begin{array}{l}\nu_{V,B,E} \in C^1(\partial D \times D, \mathbb{S}^{n-1}),\\ \text{the map } \nu_{V,B,E,x} : \partial D \to \mathbb{S}^{n-1},\ \zeta \mapsto \nu_{V,B,E}(\zeta, x),\ \text{is a}\\ C^1 \text{ orientation preserving diffeomorphism from } \partial D \text{ onto } \mathbb{S}^{n-1}\end{array} \qquad (3.3.15)$$

for $x \in D$ (where we choose the canonical orientation of $\mathbb{S}^{n-1}$ and the orientation of ∂D given by the canonical orientation of $\mathbb{R}^n$ and the unit outward normal vector).

Proposition 3.3.2 follows from (3.1.1), (3.1.2) and properties (3.2.1), (3.2.2).

Remark 3.3.1. Taking account of (3.3.9) and (3.3.10), we obtain the following formulas : at $E > E(\|V\|_{C^2,D}, \|B\|_{C^1,D}, D)$, for any $x,\ \zeta \in \bar{D}$, $x \neq \zeta$,

$$B_{i,j}(x) = -c\left(\frac{\partial \bar{k}^j_{V,B}}{\partial x_i}(E,\zeta,x) - \frac{\partial \bar{k}^i_{V,B}}{\partial x_j}(E,\zeta,x)\right), \qquad (3.3.16)$$

$$B_{i,j}(x) = -c\left(\frac{\partial \bar{k}^j_{0,V,B}}{\partial x_i}(E,x,\zeta) - \frac{\partial \bar{k}^i_{0,V,B}}{\partial x_j}(E,x,\zeta)\right). \qquad (3.3.17)$$

3.3.4 Results of uniqueness

We denote by $\omega_{0,V,B}$ the $n-1$ differential form on $\partial D \times D$ obtained in the following manner :

- for $x \in D$, let $\omega_{V,B,x}$ be the pull-back of ω_0 by $\nu_{V,B,E,x}$ where ω_0 denotes the canonical orientation form on $\mathbb{S}^{n-1}$ (i.e. $\omega_0(\zeta)(v_1, .., v_{n-1}) = \det(\zeta, v_1, .., v_{n-1})$, for $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ and $v_1, .., v_{n-1} \in T_\zeta\mathbb{S}^{n-1}$),

- for $(\zeta, x) \in \partial D \times D$ and for any $v_1, .., v_{n-1} \in T_{(\zeta,x)}(\partial D \times D)$,

$$\omega_{0,V,B}(\zeta, x)(v_1, .., v_{n-1}) = \omega_{V,B,x}(\zeta)(\sigma'_{(\zeta,x)}(v_1), .., \sigma'_{(\zeta,x)}(v_{n-1})),$$

where $\sigma : \partial D \times D \to \partial D$, $(\zeta', x') \mapsto \zeta'$, and $\sigma'_{(\zeta,x)}$ denotes the derivative (linear part) of σ at (ζ, x).

From smoothness of $\nu_{V,B,E}$, σ and ω_0, it follows that $\omega_{0,V,B}$ is a continuous $n-1$ form on $\partial D \times D$.

Now let $\lambda \in \mathbb{R}^+$ and $V_1, V_2 \in C^2(\bar{D}, \mathbb{R})$, $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_{mag}(\bar{D})$, such that $\max(\|V_1\|_{C^2,D}, \|V_2\|_{C^2,D}, \|B_1\|_{C^1,D}, \|B_2\|_{C^1,D}) \leq \lambda$. For $\mu = 1, 2$, let $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{F}_{pot}(D, B_\mu)$.

Let $E > E(\lambda, \lambda, D)$ where $E(\lambda, \lambda, D)$ is defined in (3.1.7). Consider β^1, β^2 the differential one forms defined on $(\partial D \times \bar{D})\backslash\bar{G}$ by

$$\beta^\mu(\zeta, x) = \sum_{j=1}^{n} \bar{k}^j_{V_\mu,B_\mu}(E, \zeta, x)dx_j, \qquad (3.3.18)$$

for $(\zeta, x) \in (\partial D \times \bar{D})\backslash\bar{G}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $\mu = 1, 2$.

Consider the differential forms Φ_0 on $(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$ and Φ_1 on $(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$ defined by

$$\begin{aligned}\Phi_0(\zeta,x) &= -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\beta^2-\beta^1)(\zeta,x)\wedge d_\zeta(\mathcal{S}_{0_{V_2,\mathbf{A}_2,E}}-\mathcal{S}_{0_{V_1,\mathbf{A}_1,E}})(\zeta,x)\\ &\quad\wedge\sum_{p+q=n-2}(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_1,\mathbf{A}_1,E}}(\zeta,x))^p\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_2,\mathbf{A}_2,E}}(\zeta,x))^q, \quad (3.3.19)\end{aligned}$$

for $(\zeta,x)\in(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$, where $d=d_\zeta+d_x$,

$$\begin{aligned}\Phi_1(\zeta,x) &= -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\big[\beta^1(\zeta,x)\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_1,\mathbf{A}_1,E}}(\zeta,x))^{n-1}\\ &\quad+\beta^2(\zeta,x)\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_2,\mathbf{A}_2,E}}(\zeta,x))^{n-1}-\beta^1(\zeta,x) \quad (3.3.20)\\ &\quad\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_2,\mathbf{A}_2,E}}(\zeta,x))^{n-1}-\beta^2(\zeta,x)\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_1,\mathbf{A}_1,E}}(\zeta,x))^{n-1}\big],\end{aligned}$$

for $(\zeta,x)\in(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$, where $d=d_\zeta+d_x$.

Consider the C^2 map $incl:(\partial D\times\partial D)\backslash\partial G\to(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$, $(\zeta,x)\mapsto(\zeta,x)$.

From (3.3.8), (3.3.12) and (3.3.13), it follows that Φ_0 is continuous on $(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$ and $incl^*(\Phi_0)$ is integrable on $\partial D\times\partial D$ and Φ_1 is continuous on $(\partial D\times\bar D)\backslash\bar G$ and integrable on $\partial D\times\bar D$ (where $incl^*(\Phi_0)$ is the pull-back of the differential form Φ_0 by the inclusion map $incl$).

Lemma 3.3.1. *Let $\lambda\in\mathbb{R}^+$ and $E>E(\lambda,\lambda,D)$. Let $V_1,V_2\in C^2(\bar D,\mathbb{R})$, $B_1,B_2\in\mathcal{F}_{mag}(\bar D)$ such that* $\max(\|V_1\|_{C^2,D},\|V_2\|_{C^2,D},\|B_1\|_{C^1,D},\|B_2\|_{C^1,D})\le\lambda$. *For $\mu=1,2$, let $\mathbf{A}_\mu\in\mathcal{F}_{pot}(D,B_\mu)$. The following equalities are valid :*

$$\int_{\partial D\times\partial D} incl^*(\Phi_0)=\int_{\partial D\times\bar D}\Phi_1; \quad (3.3.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\Phi_1(\zeta,x) &= (r_{V_1,E}(x)^n\omega_{0,V_1,B_1}(\zeta,x)+r_{V_2,E}(x)^n\omega_{0,V_2,B_2}(\zeta,x)\\ &\quad-\bar k_{V_1,B_1}(E,\zeta,x)\circ\bar k_{V_2,B_2}(E,\zeta,x) \quad (3.3.22)\\ &\quad\times\big(r_{V_1,E}(x)^{n-2}\omega_{0,V_1,B_1}(\zeta,x)+r_{V_2,E}(x)^{n-2}\\ &\quad\times\omega_{0,V_2,B_2}(\zeta,x)\big))\wedge dx_1\wedge..\wedge dx_n,\end{aligned}$$

for $(\zeta,x)\in\partial D\times D$.

Equality (3.3.21) follows from regularization and Stokes' formula. Proof of Lemma 3.3.1 is given in Section 3.4.

Taking account of Lemma 3.3.1, Proposition 3.3.2 and Remark 3.3.1, we obtain the following Theorem of uniqueness.

Theorem 3.3.1. *Let $\lambda\in\mathbb{R}^+$ and $E>E(\lambda,\lambda,D)$. Let $V_1,V_2\in C^2(\bar D,\mathbb{R})$, $B_1,B_2\in\mathcal{F}_{mag}(\bar D)$ such that* $\max(\|V_1\|_{C^2,D},\|V_2\|_{C^2,D},\|B_1\|_{C^1,D},\|B_2\|_{C^1,D})\le\lambda$. *For $\mu=1,2$, let $\mathbf{A}_\mu\in\mathcal{F}_{pot}(D,B_\mu)$. The following estimate is valid :*

$$\begin{aligned}&\int_D(r_{V_1,E}(x)-r_{V_2,E}(x))\left(r_{V_1,E}(x)^{n-1}-r_{V_2,E}(x)^{n-1}\right)dx\le\\ &\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!}\int_{\partial D\times\partial D} incl^*(\Phi_0). \quad (3.3.23)\end{aligned}$$

In addition, the following statements are valid :

if $k_{V_1,B_1}(E,\zeta,x) = k_{V_2,B_2}(E,\zeta,x)$ *for* $\zeta, x \in \partial D$, $\zeta \neq x$, *then* $V_1 \equiv V_2$ *and* $B_1 \equiv B_2$ *on* $\bar{D}$ *; if* $k_{0,V_1,B_1}(E,\zeta,x) = k_{0,V_2,B_2}(E,\zeta,x)$ *for* $\zeta, x \in \partial D$, $\zeta \neq x$, *then* $V_1 \equiv V_2$ *and* $B_1 \equiv B_2$ *on* $\bar{D}$.

Proof of Theorem 3.3.1 is given in Section 3.4.

If $B_1 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$ and V_1, V_2, and D are smoother than C^2, then Lemma 3.3.1 and Theorem 3.3.1 follow from results of [Bey79] and [GN83].

3.4 Proof of Theorem 3.3.1 and Lemma 3.3.1

Using Lemma 3.2.1, (3.2.4), Propositions 3.3.1, 3.3.2 and Lemma 3.3.1, we first prove Theorem 3.3.1.

Proof of Theorem 3.3.1. From (3.3.22) and Proposition 3.3.2 and definition of ω_{0,V_μ,B_μ}, $\mu = 1, 2$, it follows that

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-1)!}\int_{\partial D\times\bar{D}} \Phi_1 = \qquad (3.4.1)\\
&\int_D r_{V_1,E}(x)^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(1 + \frac{w \circ \bar{k}_{V_2,B_2}(E,\zeta_{1,x}(w),x)}{r_{V_1,E}(x)}\right) d\sigma(w)dx\\
&+\int_D r_{V_2,E}(x)^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(1 + \frac{\bar{k}_{V_1,B_1}(E,\zeta_{2,x}(w),x)\circ w}{r_{V_2,E}(x)}\right) d\sigma(w)dx,
\end{aligned}$$

where $d\sigma$ is the canonical measure on $\mathbb{S}^{n-1}$, and where $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$, and where for $x \in D$ and $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ and $\mu = 1, 2$, $\zeta_{\mu,x}(w)$ denotes the unique point ζ of ∂D such that $w = \nu_{V_\mu,B_\mu,E,x}(\zeta)$. Hence using Cauchy-Bunyakovski-Schwarz inequality and (3.3.2) and the equality $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma(w) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, we obtain

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{\partial D\times\bar{D}} \Phi_1 \geq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_D (r_{V_1,E}(x) - r_{V_2,E}(x))(r_{V_1,E}(x)^{n-1} - r_{V_2,E}(x)^{n-1})dx. \qquad (3.4.2)$$

Estimate (3.4.2) and equality (3.3.21) prove (3.3.23).

Now assume that $k_{V_1,B_1}(E,\zeta,x) = k_{V_2,B_2}(E,\zeta,x)$ for $\zeta, x \in \partial D$, $\zeta \neq x$. Then from (3.3.1) and (3.3.18), it follows that the one form $incl^*(\beta^2 - \beta^1)(\zeta,x)$ is null for any $\zeta, x \in \partial D$, $\zeta \neq x$. Hence from (3.3.19), it follows that the $2n-2$ form $incl^*(\Phi_0)(\zeta,x)$ is null for any $\zeta, x \in \partial D$, $\zeta \neq x$. Thus using (3.3.23), we obtain $\int_D (r_{V_1,E}(x) - r_{V_2,E}(x))(r_{V_1,E}(x)^{n-1} - r_{V_2,E}(x)^{n-1})dx \leq 0$, and as $n \geq 2$, this latter inequality implies that

$$r_{V_1,E} \equiv r_{V_2,E} \text{ on } \bar{D}. \qquad (3.4.3)$$

Thus $V_1 \equiv V_2$.

Using (3.4.3) and the equality $|\bar{k}_{V_i,B_i}(E,\zeta,x)| = r_{V_i,E}(x)$ for $i=1,2$, $x\in D$ and $\zeta\in\partial D$, and using (3.4.1), we obtain that

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\int_{\partial D\times\bar{D}}\Phi_1 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_D r_{V_i,E}(x)^{n-2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\big|\bar{k}_{V_1,B_1}(E,\zeta_{i,x}(w),x)\\ &\quad -\bar{k}_{V_2,B_2}(E,\zeta_{i,x}(w),x)\big|^2 d\sigma(w)dx.\end{aligned}$$

As $\int_{\partial D\times\bar{D}}\Phi_1 = 0$ (due to (3.3.21)), we obtain that for any $x\in D$, and any $w\in\mathbb{S}^{n-1}$, $\bar{k}_{V_1,B_1}(E,\zeta_{1,x}(w),x) = \bar{k}_{V_2,B_2}(E,\zeta_{1,x}(w),x)$. At fixed $x\in D$, we know that $\zeta_{1,x}$ is onto ∂D. Hence the following equality is valid

$$\bar{k}_{V_1,B_1}(E,\zeta,x) = \bar{k}_{V_2,B_2}(E,\zeta,x),\ \zeta\in\partial D,\ x\in D. \tag{3.4.4}$$

From (3.4.4) and (3.3.16), it follows that $B_1\equiv B_2$ on D.

Now assume that $k_{0,V_1,B_1}(E,\zeta,x) = k_{0,V_2,B_2}(E,\zeta,x)$ for $\zeta, x\in\partial D$, $\zeta\neq x$. Then using (3.2.5) and replacing B_i by $-B_i$, $i=1,2$, in the proof, we obtain $(V_1,B_1)\equiv(V_2,B_2)$. □

Using Lemma 3.2.1, (3.2.4), Propositions 3.3.1, 3.3.2, we prove Lemma 3.3.1.

Proof of Lemma 3.3.1. We first prove (3.3.22). Let U be an open subset of $\mathbb{R}^{n-1}$ and $\phi: U\to\partial D$ such that ϕ is a C^2 parametrization of ∂D. Let $\phi_0: U\times D\to\partial D\times D$, $(\zeta,x)\mapsto(\phi(\zeta),x)$. We work in coordinates given by $(U\times D,\phi_0)$. Let $\mu,\mu'=1,2$. On one hand from definition of ω_{0,V_μ,B_μ}, definition of $\nu_{V_\mu,B_\mu,E,x}$ and (3.3.2), we obtain

$$\begin{aligned}&\omega_{0,V_\mu,B_\mu}(\zeta,x)\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = (-1)^n r_{V_\mu,E}(x)^{-n}\\ &\times\det\left(\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x),\frac{\partial\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}}{\partial\zeta_1}(E,\zeta,x),\ldots,\frac{\partial\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}}{\partial\zeta_{n-1}}(E,\zeta,x)\right)\\ &d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_{n-1}\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

for $\zeta\in U$ and $x\in D$ and $\mu=1,2$.

On the other hand straightforward calculations give ($dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}(\zeta,x) = \sum_{\substack{m_1=1..n\\ m_2=1..n-1}}\frac{\partial^2\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}}{\partial x_{m_1}\partial\zeta_{m_2}}(\zeta,x)dx_{m_1}\wedge d\zeta_{m_2}$)

$$\begin{aligned}&\beta^{\mu'}(\zeta,x)\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}(\zeta,x))^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!\\ &\times\det\left(\bar{k}_{V_{\mu'},B_{\mu'}}(E,\zeta,x),\frac{\partial^2\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}}{\partial\zeta_1\partial x}(\zeta,x),\ldots,\frac{\partial^2\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}}{\partial\zeta_{n-1}\partial x}(\zeta,x)\right)\\ &d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_{n-1}\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

for $\zeta\in U$, $x\in D$. Note that due to (3.3.2) and Proposition 3.3.2, $\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x)$ is orthogonal to $\frac{\partial}{\partial\zeta_m}\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x)$, $m=1\ldots n-1$, and that $(\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x),$

$\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x),\ldots,\frac{\partial}{\partial\zeta_{n-1}}\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x))$ is a basis of $\mathbb{R}^n$. Hence from (3.4.5), (3.4.6) and (3.3.9), we obtain

$$\begin{aligned}\beta^{\mu'}(\zeta,x)\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}(\zeta,x))^{n-1} &= -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!r_{V_\mu,E}(x)^n \\ &\times\frac{\bar{k}_{V_{\mu'},B_{\mu'}}(E,\zeta,x)\circ\bar{k}_{V_\mu,B_\mu}(E,\zeta,x)}{r_{V_\mu,E}(x)^2}\omega_{0,V_\mu,B_\mu}(\zeta,x)\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

for $\zeta\in U$, $x\in D$. Definition (3.3.20) and equality (3.4.7) proves (3.3.22).

We sketch the proof of (3.3.21). Let $\varepsilon\in]0,1[$ and $x_0\in D$. We consider

$$D_\varepsilon=\{x_0+\varepsilon(x-x_0)\mid x\in D\}.\tag{3.4.8}$$

As D is a strictly convex (in the strong sense) open domain of $\mathbb{R}^n$, with C^2 boundary, it follows that D_ε is also a strictly convex (in the strong sense) open domain of $\mathbb{R}^n$, with C^2 boundary, and in addition, as $0<\varepsilon<1$,

$$\bar{D}_\varepsilon\subseteq D,\tag{3.4.9}$$
$$dist(\partial D,\partial D_\varepsilon)=(1-\varepsilon)dist(\partial D,x_0).\tag{3.4.10}$$

where $dist(\partial D,\partial D_\varepsilon)=\inf\{|x-y|\mid x\in D_\varepsilon,\ y\in\partial D\}$ and $dist(\partial D,x_0)=\inf\{|y-x_0|\mid y\in\partial D\}>0$.

For $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ two finite-dimensional oriented C^2 manifold (with or without boundary), we consider on $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ the differential product structure induced by the already given differential structures of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ and we consider the orientation of $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ given by the already fixed orientation of $\mathcal{M}$ and of $\mathcal{N}$. The orientation of ∂D_ε is given by the unit outward normal vector and $\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ is a C^2 manifold with boundary $\partial D\times\partial D_\varepsilon$ (which is a C^2 manifold without boundary). Let $incl_\varepsilon\in C^2(\partial D\times\partial D_\varepsilon,\partial D\times\bar{D}_\varepsilon)$ be defined by $incl_\varepsilon(\zeta,x)=(\zeta,x)$, $(\zeta,x)\in\partial D\times\partial D_\varepsilon$. Here we omit the details of the proof of the following statement : $\int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon}\Phi_1\to\int_{\partial D\times\bar{D}}\Phi_1$ and $\int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon}incl_\varepsilon^*(\Phi_0)\to\int_{\partial D\times\partial D}incl^*(\Phi_0)$ as $\varepsilon\to1^-$. These statements follow from (3.3.12), (3.3.13) and (3.3.9). We shall prove that

$$\int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon}\Phi_1=\int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon}incl_\varepsilon^*(\Phi_0).\tag{3.4.11}$$

For $\mu=1,2$, let $\mathcal{S}_{0_\mu}\in C^2((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\backslash\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}^n\},\mathbb{R})$ such that $\mathcal{S}_{0_\mu}(\zeta,x)=\mathcal{S}_{0_{V_\mu,\mathbf{A}_\mu,E}}(\zeta,x)$, $(\zeta,x)\in(\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G}$ (from (3.3.8), it follows that such a function $\mathcal{S}_{0_\mu}$ exists). Let $\delta_\varepsilon=dist(\partial D,\partial D_\varepsilon)$. Let W_{1,δ_ε} be the open subset $\partial D+B(0,\frac{\delta_\varepsilon}{2})=\{x+y\mid x\in\partial D,\ y\in\mathbb{R}^n,\ |y|<\frac{\delta_\varepsilon}{2}\}$ and let W_{2,δ_ε} be the open subset $D_\varepsilon+B(0,\frac{\delta_\varepsilon}{2})=\{x+y\mid x\in D_\varepsilon,\ y\in\mathbb{R}^n,\ |y|<\frac{\delta_\varepsilon}{2}\}$. Note that W_{1,δ_ε} is an open neighborhood of ∂D which does not intersect W_{2,δ_ε} which is an open neighborhood of $\bar{D}_\varepsilon$. Hence $\mathcal{S}_{0_\mu}\in C^2(W_{1,\delta_\varepsilon}\times W_{2,\delta_\varepsilon},\mathbb{R})$ and there exists a sequence of functions $(\mathcal{S}_{0_{\mu,m}})$ such that

$$\mathcal{S}_{0_{\mu,m}} \in C^3(W_{1,\delta_\varepsilon} \times W_{2,\delta_\varepsilon}, \mathbb{R}), \tag{3.4.12}$$

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\partial D\times\bar{D}_\varepsilon \\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\leq 2}} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}(\mathcal{S}_{0_{\mu,m}} - \mathcal{S}_{0_\mu})}{\partial x_{\alpha_1}\partial y_{\alpha_2}}(x,y)\right| \to 0, \text{ as } m \to +\infty. \tag{3.4.13}$$

Fix $m \in \mathbb{N}$. Let $\mu = 1, 2$. We define the differential one-form, β^μ_m on $(\partial D \times \bar{D}_\varepsilon)$ by

$$\beta^\mu_m(\zeta, x) = d_x\mathcal{S}_{0_{\mu,m}}(\zeta, x) - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^j_\mu(x)dx_j, \tag{3.4.14}$$

for $(\zeta, x) \in \partial D \times \bar{D}_\varepsilon$ and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $\mathbf{A}_\mu(x) = (\mathbf{A}^1_\mu(x), \ldots, \mathbf{A}^n_\mu(x))$ and where $d = d_\zeta + d_x$ is the De Rham differential operator on $\partial D \times \bar{D}_\varepsilon$.

We define the continuous differential $2n-2$ form $\Phi_{0,m}$ on $\partial D \times \bar{D}_\varepsilon$ by

$$\begin{aligned}\Phi_{0,m}(\zeta, x) &= -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\beta^2_m - \beta^1_m)(\zeta, x) \wedge d_\zeta(\mathcal{S}_{0_{2,m}} - \mathcal{S}_{0_{1,m}})(\zeta, x) \\ &\quad \wedge \sum_{p+q=n-2} (dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{1,m}}(\zeta, x))^p \wedge (dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{2,m}}(\zeta, x))^q,\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

for $\zeta \in \partial D$, $x \in \bar{D}_\varepsilon$, where $d = d_\zeta + d_x$ is the De Rham differential operator on $\partial D \times \bar{D}_\varepsilon$. We define the continuous differential $2n-1$ form $\Phi_{1,m}$ on $\partial D \times \bar{D}_\varepsilon$ by

$$\begin{aligned}\Phi_{1,m}(\zeta, x) &= -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[\beta^1_m(\zeta, x) \wedge (dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{1,m}}(\zeta, x))^{n-1} + \beta^2_m(\zeta, x)\right. \\ &\quad \wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{2,m}}(\zeta, x))^{n-1} - \beta^1_m(\zeta, x) \wedge (dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{2,m}}(\zeta, x))^{n-1} \\ &\quad \left. -\beta^2_m(\zeta, x) \wedge (dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{1,m}}(\zeta, x))^{n-1}\right],\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

for $(\zeta, x) \in \partial D \times \bar{D}_\varepsilon$.

From (3.4.14)-(3.4.16), (3.3.9), (3.4.13), it follows that

$$\int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon} \Phi_{1,m} \to \int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon} \Phi_1, \text{ as } m \to +\infty, \tag{3.4.17}$$

$$\int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon} incl^*_\varepsilon(\Phi_{0,m}) \to \int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon} incl^*_\varepsilon(\Phi_0), \text{ as } m \to +\infty. \tag{3.4.18}$$

If we prove that $\int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon} \Phi_{1,m} = \int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon} incl^*_\varepsilon(\Phi_{0,m})$, then formula (3.4.11) will follow from (3.4.17) and (3.4.18).

From (3.4.12), it follows that

$$dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{\mu,m}} \text{ is a } C^1 \text{ form on } \partial D \times \bar{D}_\varepsilon, \tag{3.4.19}$$

$$d(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{\mu,m}}) = 0, \tag{3.4.20}$$

where d is the De Rham differential operator on $\partial D \times \bar{D}_\varepsilon$. From (3.4.14), it follows that

$$d\beta_m^\mu(\zeta,x) = -dd_\zeta \mathcal{S}_{0_{\mu,m}}(\zeta,x) - \frac{1}{c}\sum_{1\le j_1<j_2\le n} B^\mu_{j_1,j_2}(x)dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}, \qquad (3.4.21)$$

for $(\zeta,x)\in\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ and $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ($B^\mu_{j_1,j_2}(x)$ denotes the elements of $B_\mu(x)$). From (3.4.19)-(3.4.21), it follows that $\Phi_{0,m}$ is C^1 on $\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ and that

$$\begin{aligned} &d\Phi_{0,m}(\zeta,x) = (-1)^{n-1}\Phi_{1,m}(\zeta,x)+\omega(\zeta,x), \qquad (3.4.22)\\ &\omega(\zeta,x) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{c}\sum_{1\le j_1<j_2\le n}(B^2_{j_1,j_2}(x)-B^1_{j_1,j_2}(x))dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\\ &\wedge d_\zeta(\mathcal{S}_{0_{2,m}}-\mathcal{S}_{0_{1,m}})(\zeta,x)\wedge\sum_{p+q=n-2}(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{1,m}}(\zeta,x))^p\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{2,m}}(\zeta,x))^q, \end{aligned}$$

for $(\zeta,x)\in\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ and $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Note that as B_μ, $\mu=1,2$, is continuously differentiable on $\bar{D}$, then the 2-form defined on $\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ by $\sum_{1\le j_1<j_2\le n}(B^2_{j_1,j_2}(x)-B^1_{j_1,j_2}(x))dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}$, $(\zeta,x)\in\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ is also C^1. Note that ($\bar{D}_\varepsilon$ is a n-dimensional C^2 manifold and (3.4.20))

$$\omega(\zeta,x) = d\tilde{\omega}(\zeta,x), \qquad (3.4.23)$$

where

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(\zeta,x) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{(\mathcal{S}_{0_{2,m}}-\mathcal{S}_{0_{1,m}})(\zeta,x)}{c}\sum_{1\le j_1<j_2\le n}(B^2_{j_1,j_2}(x)-B^1_{j_1,j_2}(x))\\ &dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\sum_{p+q=n-2}(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{1,m}}(\zeta,x))^p\wedge(dd_\zeta\mathcal{S}_{0_{2,m}}(\zeta,x))^q, \qquad (3.4.24) \end{aligned}$$

for $(\zeta,x)\in\partial D\times\bar{D}_\varepsilon$ and $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Since ∂D_ε is a $(n-1)$-dimensional C^2 manifold, it follows that

$$incl_\varepsilon^*\tilde{\omega}(\zeta,x) = 0 \qquad (3.4.25)$$

for $(\zeta,x)\in\partial D\times\partial D_\varepsilon$. Using (3.4.22), (3.4.23), (3.4.25), we obtain by Stokes' formula the equality $\int_{\partial D\times\bar{D}_\varepsilon}\Phi_{1,m} = \int_{\partial D\times\partial D_\varepsilon} incl_\varepsilon^*(\Phi_{0,m})$. $\square$

3.5 Proof of Lemma 2.1 and Proposition 3.1

3.5.1 Continuation of (V,B) and notations

Let $\tilde{V}\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ be such that $\tilde{V}\equiv V$ on $\bar{D}$ and $\|\tilde{V}\|_{C^2,\mathbb{R}^n}<\infty$. Let $\tilde{B}\in C^1(\mathbb{R}^n,A_n(\mathbb{R}))$ (where $A_n(\mathbb{R})$ denotes the space of real antisymmetric matrices) such that $\tilde{B} \equiv B$ on $\bar{D}$ and $\|\tilde{B}\|_{C^1,\mathbb{R}^n} < \infty$. Let ψ be the flow for the differential system

$$\dot{x} = \frac{p}{\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}}, \tag{3.5.1}$$
$$\dot{p} = -\nabla\tilde{V}(x) + \frac{1}{c}\tilde{B}(x)\frac{p}{\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}},$$

for $x \in \mathbb{R}^n$ and $p \in \mathbb{R}^n$ (it means that a solution of (3.5.1), $(x(t), p(t))$, $t \in]t_-, t_+[$, which passes through $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ at time $t = 0$, is written as $(x(t), p(t)) = \psi(t, x_0, p_0)$ for $t \in]t_-, t_+[$). For equation (3.5.1), the energy

$$E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p(t)|^2}{c^2}} + \tilde{V}(x(t)) \tag{3.5.2}$$

is an integral of motion.

Under the conditions on $\tilde{V}$ and $\tilde{B}$, ψ is defined on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ and $\psi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, and a solution $x(t)$, $t \in]t_-, t_+[$, of (3.1.1) which starts at $q_0 \in D$ at time 0 with velocity v is written as $x(t) = \psi_1(t, x, \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$, $t \in]t_-, t_+[$ (we write $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ where $\psi_i = (\psi_i^1, \ldots, \psi_i^n) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$).

For $v \in \mathbb{R}^n$ and $x \in \mathbb{R}^n$, we define the vector $F(x, v)$ of $\mathbb{R}^n$ by

$$F(x, v) = -\nabla\tilde{V}(x) + \frac{1}{c}\tilde{B}(x)v. \tag{3.5.3}$$

For $x \in \mathbb{R}^n$ and $E > c^2 + \tilde{V}(x)$, we denote by $r_{\tilde{V},E}(x)$ the positive real number

$$r_{\tilde{V},E}(x) = c\sqrt{\left(\frac{E - \tilde{V}(x)}{c^2}\right)^2 - 1}, \tag{3.5.4}$$

and we denote by $\mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$ the following sphere of $\mathbb{R}^n$ of center 0

$$\mathbb{S}^{n-1}_{x,E} = \{p \in \mathbb{R}^n | |p| = r_{\tilde{V},E}(x)\}. \tag{3.5.5}$$

3.5.2 Growth estimates for a function g

Consider the function $g : \mathbb{R}^n \to B_c$ defined by

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{|x|^2}{c^2}}} \tag{3.5.6}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$. This function was considered for example in [Jol05a].

We remind that g has the following simple properties :

$$|\nabla g_i(x)|^2 \leq \frac{1}{1+\frac{|x|^2}{c^2}}, \tag{3.5.7}$$

$$|g(x)-g(y)| \leq \sqrt{n}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}}|x-y|, \tag{3.5.8}$$

$$|\nabla g_i(x)-\nabla g_i(y)| \leq \frac{3\sqrt{n}}{c}\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\frac{1}{1+\frac{|\varepsilon x+(1-\varepsilon)y|^2}{c^2}}|x-y|, \tag{3.5.9}$$

for $x,\ y\in\mathbb{R}^n,\ i=1\ldots n$, and $g=(g_1,\ldots,g_n)$. The function g is an infinitely smooth diffeomorphism from $\mathbb{R}^n$ onto B_c, and its inverse is given by $g^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-\frac{|x|^2}{c^2}}}$, for $x\in B_c$.

3.5.3 Proof of Lemma 3.2.1

For $q_0,q\in\bar{D}$, $q_0\neq q$, let $t_{+,q_0,q}=\sup\{t>0\mid \psi_1(t,q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q))\in D\}$. From Properties (3.2.1) and (3.2.2), it follows that $k_{0,V,B}(E,.,.)$ is continuous on $(\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G}$ and for $q_0,q\in\bar{D}$, $q_0\neq q$, and any $s_1,s_2\in[0,t_{+,q_0,q}[$, $s_1\neq s_2$, $\psi_1(s_1,q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q))\neq\psi_1(s_2,q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q))$ and $N(q_+)\circ\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q))_{|t=t_{+,q_0,q}}$ is positive, where $q_+=\psi_1(t_{+,q_0,q},q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,q_0,q))$ (and where $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$). Using also continuity of ψ_1, one obtains that $s_{V,B}(E,q_0,q)$ is continuous on $(\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G}$. Then we obtain that $s_{V,B}(E,q_0,\ q)\in C^1((\bar{D}\times\bar{D})\backslash\bar{G},\mathbb{R})$ by applying implicit function theorem on maps $m_i:\mathbb{R}\times((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\backslash\Delta)$, $(t,x,y)\to y_i-\psi_1^i(t,x,\tilde{k}_{0,V,B}(E,x,y))$, $i=1\ldots n$, where $\Delta=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}$ and $\tilde{k}_{0,V,B}(E,.,.)$ is a C^1 continuation of $\bar{k}_{0,V,B}(E,.,.)$ on $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\backslash\Delta$ (such a continuation exists thanks to (3.2.2), and note that for any $q_0,q\in\bar{D}$, $q\neq q_0$, $\bar{k}_{V,B}(E,q_0,q)\neq 0$). Note that $k_{V,B}(E,q_0,q)=g(\psi_2(s_{V,B}(E,q_0,q),q_0,\bar{k}_{0,V,B}(E,\ q_0,q)))$, $q_0,q\in\bar{D}$, $q_0\neq q$. It remains to prove that $s_{V,B}(E,q_0,q)$ is continuous on $G=\{(q',q')\mid q'\in\bar{D}\}$. Let $q_0=q\in D$. Let $(q_{0,m})$ and (q_m) be two sequences of points of $\bar{D}$ such that $q_{0,m}\neq q_0$ for all m and $q_{0,m}$ goes to q_0 and q_m goes to $q=q_0$ as $m\to+\infty$. Let $R=\limsup_{m\to+\infty}s_{V,B}(E,q_{0,m},q_m)\in[0,+\infty]$. We shall prove that $R=0$. Assume that $R>0$. Note that by conservation of energy $|\bar{k}_{0,V,B}(E,q_{0,m},q_m)|\leq c\sqrt{\left(\frac{E+\|V\|_\infty}{c^2}\right)^2-1}$. Using definition of R and compactness of the closed ball of $\mathbb{R}^n$ whose radius is $c\sqrt{\left(\frac{E+\|V\|_\infty}{c^2}\right)^2-1}$ and whose centre is 0, we obtain that there exist subsequences of $q_{0,m}$ and q_m (respectively still denoted by $q_{0,m}$ and q_m) such that

$$\lim_{m\to+\infty}s_{V,B}(E,q_{0,m},q_m)=R, \tag{3.5.10}$$

$$\bar{k}_{0,V,B}(E,q_{0,m},q_m)\text{ converges to some }k\in\mathbb{R}^n. \tag{3.5.11}$$

Using conservation of energy, we obtain that

$$|k| = c\sqrt{\left(\frac{E - V(q_0)}{c^2}\right)^2 - 1}. \tag{3.5.12}$$

Using (3.5.11) and (3.5.10) and continuity of ψ_1, we obtain that

$$\psi_1(t, q_0, k) = \lim_{m\to+\infty} \psi_1(t, q_{0,m}, \bar{k}_{0,V,B}(E, q_{0,m}, q_m)), \text{ for all } t \in [0, R[. \tag{3.5.13}$$

For all m and $t \in [0, s_{V,B}(E, q_{0,m}, q_m)[$, $\psi_1(t, q_{0,m}, \bar{k}_{0,V,B}(E, q_{0,m}, q_m)) \in \bar{D}$. Hence using (3.5.13), we obtain that

$$\psi_1(t, q_0, k) \in \bar{D},\ t \in [0, R[. \tag{3.5.14}$$

In addition,

$$\psi_1(0, q_0, k) = q_0 \in D. \tag{3.5.15}$$

Then $R \neq +\infty$ (otherwise this would contradict (3.2.1), in particular the fact that the solution of (3.1.1) under condition (3.1.3) with energy E, which starts at time 0 at $q_0 = \psi_1(0, q_0, k)$, reaches the boundary ∂D at a time $t_+ > 0$ and satisfies the estimate $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t_+, q_0, k) \circ N(\psi_1(t_+, q_0, k)) > 0)$.

Using continuity of ψ_1 and $\lim_{m\to+\infty} q_{0,m} = q_0$, $\lim_{m\to+\infty} q_m = q_0$, $\lim_{m\to+\infty} s_{V,B}(E, q_{0,m}, q_m) = R$, $\lim_{m\to+\infty} \bar{k}_{0,V,B}(E, q_{0,m}, q_m) = k$ and the definition of $s_{V,B}(E, q_{0,m}, q_m)$, we obtain that

$$\begin{aligned}\psi_1(R, q_0, k) &= \lim_{m\to+\infty} \psi_1(s_{V,B}(E, q_{0,m}, q_m), q_0, \bar{k}_{0,V,B}(E, q_{0,m}, q_m)) \\ &= \lim_{m\to+\infty} q_m = q_0.\end{aligned} \tag{3.5.16}$$

Properties (3.5.16), (3.5.15), (3.5.14) and (3.2.1) imply $R = 0$, which contradicts the assumption $R > 0$. Finally we proved that $s_{V,B}(E, ., .) \in C((\bar{D} \times \bar{D})\backslash\partial G, \mathbb{R})$.

Let $x_0 \in D$. From (3.2.3), it follows that for sufficiently small positive ε, E is greater than $E(\|\tilde{V}\|_{C^2, D_{x_0,\varepsilon}}, \|\tilde{B}\|_{C^1, D_{x_0,\varepsilon}}, D_{x_0,\varepsilon})$ where $D_{x_0,\varepsilon} = \{x_0 + (1+\varepsilon)(x - x_0) \mid x \in D\}$. Hence one obtains that solutions of energy E for equation (3.5.1) in $D_{x_0,\varepsilon}$ also have properties (3.2.1) and (3.2.2) ; and replacing V, B, and D by $\tilde{V}$, $\tilde{B}$ and $D_{x_0,\varepsilon}$ above in the proof, one obtains that $s_{\tilde{V},\tilde{B}}(E, ., .)$ is continuous on $(\bar{D}_{x_0,\varepsilon} \times \bar{D}_{x_0,\varepsilon})\backslash\{(q, q) \mid q \in \partial D_{x_0,\varepsilon}\}$ ($s_{\tilde{V},\tilde{B}}(E, q_0', q')$, $(q_0', q') \in \bar{D}_{x_0,\varepsilon} \times \bar{D}_{x_0,\varepsilon}$, are defined as $s_{V,B}(E, q_0, q)$, $(q_0, q) \in \bar{D} \times \bar{D}$, are defined in Subsection 2.1). Now, using also $\bar{D} \subseteq D_{x_0,\varepsilon}$ and the equality $s_{V,B}(E, q_0, q) = s_{\tilde{V},\tilde{B}}(E, q_0, q)$ for q_0, $q \in \bar{D}$, one obtains $s_{V,B}(E, ., .) \in C(\bar{D} \times \bar{D}, \mathbb{R})$ (the equality $s_{V,B}(E, q_0, q) = s_{\tilde{V},\tilde{B}}(E, q_0, q)$ for q_0, $q \in \bar{D}$, follows from the fact that if $(x(t), p(t))$ is solution of (3.5.1) in D, then $(x(t), p(t))$ is also solution of (3.5.1) in $D_{x_0,\varepsilon}$).

Lemma 3.2.1 is proved. □

3.5.4 Proof of Proposition 3.3.1

From Lemma 3.2.1, $\psi \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{A}\in C^1(\bar D,\mathbb{R}^n)$, it follows that $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}\in C(\bar D\times\bar D,\mathbb{R})$ and $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}\in C^1((\bar D\times\bar D)\backslash\bar G,\mathbb{R})$. Equalities (3.3.9) and (3.3.10) are known equalities (see Section 46 and further Sections of [Arn78]). Statements (3.3.8), (3.3.11), (3.3.12) follow from (3.3.9) and (3.3.10). We shall prove (3.3.13). We omit indices $_{V,B}$ for $s_{V,B}$, $\bar k_{0,V,B}$ and $\bar k_{V,B}$ where $\bar k_0$, $\bar k$ are defined by (3.3.1). Using the equality $y-x=\int_0^{s(E,x,y)}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,x,\bar k_0(E,x,y))dt$ and estimate $|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,x,\bar k_0(E,x,y))|\le c$, we obtain

$$|y-x|\le cs(E,x,y),\ \text{for all } x,y\in\bar D,\ y\neq x. \tag{3.5.17}$$

Derivating equality $\psi_1(s(E,x,y),x,\bar k_0(E,x,y))=y$ with respect to y_i, we obtain that

$$e_i \;=\; (\frac{\partial\psi_1^j}{\partial\bar k}(s(E,x,y),x,\bar k_0(E,x,y))\circ\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y))_{j=1..n} \tag{3.5.18}$$

$$+\frac{\partial s}{\partial y_i}(E,x,y)\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s(E,x,y),x,\bar k_0(E,x,y)),$$

for any $x,y\in\bar D$, $x\neq y$ and where $(e_1,\dots,e_n)$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ (and where $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$). For $t\in\mathbb{R}$, $x\in\bar D$, and $k\in\mathbb{R}^n$ and $j=1..n$ the following equality is valid : $\psi_1^j(t,x,k)=x_j+tg_j(k)+\int_0^t\left[g_j(k+\int_0^s F(\psi_1(\sigma,x,k),g(\psi_2(\sigma,x,k)))d\sigma)-g_j(k)\right]ds$. Hence we obtain that for $t\in\mathbb{R}$, $x\in\bar D$, $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n$, and $j=1..n$,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k_l}(t,x,k)=t\frac{\partial g_j}{\partial k_l}(k)+\int_0^t\left[\frac{\partial g_j}{\partial k_l}(k+\int_0^s F(\psi_1(\sigma,x,k),g(\psi_2(\sigma,x,k)))\right.\\&\left.d\sigma)-\frac{\partial g_j}{\partial k_l}(k)\right]ds+\int_0^t\nabla g_j(k+\int_0^s F(\psi_1(\sigma,x,k),g(\psi_2(\sigma,x,k)))d\sigma)\circ\\&\int_0^s\frac{\partial}{\partial k_l}F(\psi_1,g(\psi_2))_{|(\sigma,x,k)}d\sigma ds,\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

for any $l=1..n$. Define

$$R=\sup_{(x',y')\in\bar D}s(E,x',y'),$$

$$M_3=\sup_{\substack{t\in[0,R],x'\in\bar D,l=1\dots n\\ |k|\le c\sqrt{\left(\frac{\sup_{x'\in\bar D}E-V(x')}{c^2}\right)^2-1}}}|\frac{\partial}{\partial k_l}F(\psi_1,g(\psi_2))_{|(t,x',k)}|,$$

$$M_4=\max(M_3,\sqrt{n}\|V\|_{C^2,D}+n\|B\|_{C^1,D}).$$

Then using (3.5.19) and growth properties of g, we obtain that

$$
\begin{aligned}
&|\frac{\partial \psi_1^j}{\partial k_l}(s(E,x,y),x,\bar{k}_0(E,x,y)) - s(E,x,y)\frac{\partial g_j}{\partial k_l}(\bar{k}_0(E,x,y))| \\
&\le M_4 s(E,x,y)^2(1+\frac{3\sqrt{n}}{c}), \qquad (3.5.20)
\end{aligned}
$$

for $x,y\in\bar{D}$, $x\neq y$ and $j,l=1..n$. where $\bar{k}_0$ is defined by (3.3.1).

Let $x,y\in\bar{D}$, $x\neq y$. Using the identity

$$
\begin{aligned}
\bar{k}(E,x,y) = \bar{k}_0(E,x,y) + \int_0^{s(E,x,y)} \big(&-\nabla V(\psi_1(s,x,\bar{k}_0(E,x,y))) \\
+ \frac{1}{c}B(\psi_1(s,x,\bar{k}_0(E,x,y)))g(\psi_2(s,x,\bar{k}_0(E,x,y)))\Big)\, ds,
\end{aligned}
$$

we obtain the following estimate

$$
|\bar{k}(E,x,y) - \bar{k}_0(E,x,y)| \le M_5 s(E,x,y), \qquad (3.5.21)
$$

where $M_5 = \sqrt{n}\|V\|_{C^2,D} + n\|B\|_{C^1,D}$. Using (3.3.2), we obtain that

$$
\bar{k}_0(E,x,y)\circ\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial|\bar{k}_0|^2}{\partial y_i}(E,x,y) = 0, \qquad (3.5.22)
$$

for $i=1..n$. From (3.3.2), (3.5.21) and (3.5.22), it follows that

$$
\begin{aligned}
&|\frac{\bar{k}(E,x,y)}{|\bar{k}(E,x,y)|}\circ\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y)| \le \frac{1}{|\bar{k}(E,x,y)|}|(\bar{k}(E,x,y)-\bar{k}_0(E,\\
&x,y))\circ\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y)| + \frac{1}{|\bar{k}(E,x,y)|}|\bar{k}_0(E,x,y)\circ\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y)| \\
&\le c^{-1}\left(\left(\frac{\inf_{x'\in\bar{D}} E - V(x')}{c^2}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} M_5 s(E,x,y)|\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y)|, \qquad (3.5.23)
\end{aligned}
$$

for $i=1..n$.

Let $(v^1,\ldots,v^{n-1})$ be an orthonormal family of $\mathbb{R}^n$ such that $(\frac{\bar{k}(E,x,y)}{|\bar{k}(E,x,y)|}, v^1, \ldots, v^{n-1})$ is an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$. Note that using definition of g and (3.5.22), we obtain

$$
\begin{aligned}
&(\nabla g_j(\bar{k}_0(E,x,y))\circ\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y))_{j=1..n} = \qquad (3.5.24)\\
&\left(1+\frac{|\bar{k}_0(E,x,y)|^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial \bar{k}_0}{\partial y_i}(E,x,y),\ i=1..n.
\end{aligned}
$$

Hence using (3.5.24), (3.5.20) and (3.5.18) (and $k(E,x,y)\circ v^h=0$), we obtain

$$
\begin{aligned}
s(E,x,y)|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)\circ v^h| &= \sqrt{1+\frac{|\bar k_0(E,x,y)|^2}{c^2}}s(E,x,y)\\
&\times|(\nabla g_j(\bar k_0(E,x,y))\circ\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y))_{j=1..n}\circ v^h|\\
&\le \sqrt{1+\frac{|\bar k_0(E,x,y)|^2}{c^2}}\Big[nM_4 s(E,x,y)^2(1+\frac{3}{c})|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|\\
&+|(\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(s(E,x,y),x,\bar k_0(E,x,y))\circ\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y))_{j=1..n}\circ v^h|\Big]\\
&= \sqrt{1+\frac{|\bar k_0(E,x,y)|^2}{c^2}}\Big[nM_4 s(E,x,y)^2(1+\frac{3}{c})|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|+|v_i^h|\Big]\\
&\le \frac{\sup_{x'\in\bar D}E-V(x')}{c^2}(nM_4(1+\frac{3}{c})s(E,x,y)^2|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|+1), \quad (3.5.25)
\end{aligned}
$$

for $i=1\ldots n$. Let $M_6=c^{-1}\left((c^{-2}\inf_{x'\in\bar D}(E-V(x')))^2-1\right)^{-\frac12}M_5+c^{-2}\times$ $\sup_{x'\in\bar D}(E-V(x'))(nM_4(1+\frac{3}{c})+1)$. From (3.5.23) and (3.5.25), it follows that

$$
s(E,x,y)|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|\le\sqrt{n}M_6(1+s(E,x,y)(s(E,x,y)|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|)), \quad (3.5.26)
$$

for $i=1\ldots n$.

Using uniform continuity of $s(E,.,.)$ on $\bar D\times\bar D$, we obtain that there exists some $\eta>0$ such that if $x,y\in\bar D$, $|x-y|<\eta$, then $\sqrt{n}M_6 s(E,x,y)\le\frac12$. Then, using (3.5.26), we obtain that $s(E,x,y)|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|\le 2\sqrt{n}M_6$, for $x,y\in\bar D$, $|x-y|<\eta$ and $i=1..n$. Now using the continuous differentiability of $\bar k_0(E,.,.)$ on $(\bar D\times\bar D)\backslash\bar G$, we obtain that $|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|\le\frac{M_i'}{s(E,x,y)}$ for $x,y\in\bar D$, $x\neq y$ and where $M_i'=\max(2M_6\sqrt{n},R\sup_{x',y'\in\bar D,|x'-y'|\ge\eta}|\frac{\partial\bar k_0}{\partial y_i}(E,x,y)|)$. Putting $M_2=\sup_{i=1..n}cM_i'$ and using (3.5.17) and (3.3.11), we obtain (3.3.13). □

3.6 Proof of Properties (3.2.1) and (3.2.2)

In this Section we first consider solutions $x(t)$ of (3.5.1) in an open bounded subset Ω of $\mathbb{R}^n$ (see Subsection 3.6.1) and we give properties of these solutions at fixed and sufficiently large energy (see Subsections 3.6.3 and 3.6.4) (Ω should be thought as an open neighborhood of D). Using these properties we prove Properties (3.2.1) and (3.2.2) (see Subsection 3.6.5). Subsections 3.6.6, 3.6.7, 3.6.8, 3.6.9 are devoted to the proof of Propositions 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4 formulated in Subsection 3.6.4.

We keep notations of Subsections 3.5.1, 3.5.2.

3.6.1 Additional notations

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with frontier $\partial\Omega$. We define a positive number $\delta(\Omega)$ by

$$\delta(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} |x|. \tag{3.6.1}$$

We consider the following equation in Ω :

$$\dot{p} = F(x, \dot{x}),\ p = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}}},\ x \in \Omega,\ p \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6.2}$$

where the force $F(x, \dot{x}) = -\nabla\tilde{V}(x) + \frac{1}{c}\tilde{B}(x)\dot{x}$ is defined by (3.5.3). For the equation (3.6.2), the energy $E = c^2\sqrt{1 + \frac{|p(t)|^2}{c^2}} + \tilde{V}(x(t))$ is an integral of motion.

Note that if $x(t)$, $t \in]t_-, t_+[$, is a solution of (3.6.2) which starts at $x_0 \in \Omega$ at time 0 with velocity v then $x(t) = \psi_1(t, x_0, g^{-1}(v))$, $t \in]t_-, t_+[$, where the function g is defined by (3.5.6) and where $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ is the flow of the differential system (3.5.1). We obtain, in particular, $x(t) \to \psi_1(t_\pm, x_0, g^{-1}(v))$, as $t \to t_\pm$, and $\dot{x}(t) \to g(\psi_2(t_\pm, x_0, g^{-1}(v)))$, as $t \to t_\pm$.

We denote by Λ the open subset of $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ where the flow of the differential system (3.6.2) is defined, i.e.

$$\Lambda = \{(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \mid \forall s \in [0, t]\ \psi_1(s, x, p) \in \Omega\},$$

where $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ is the flow of the differential system (3.5.1).

For $E > c^2 + \sup_{x\in\Omega} \tilde{V}(x)$, we denote by $\mathcal{V}_E$ the following smooth $2n-1$-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$

$$\mathcal{V}_E = \{(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid |p| = r_{\tilde{V},E}(x)\}, \tag{3.6.3}$$

where $r_{\tilde{V},E}(x)$ is defined by (3.5.4).

For $E > c^2 + \sup_{x\in\Omega} \tilde{V}(x)$, we also consider the map $\varphi_E \in C^1(\Lambda \cap (]0, +\infty[\times\mathcal{V}_E), \Omega \times \Omega)$, defined by

$$\varphi_E(t, x, p) = (x, \psi_1(t, x, p)), \quad \text{for } (t, x, p) \in \Lambda \cap (]0, +\infty[\times\mathcal{V}_E). \tag{3.6.4}$$

3.6.2 Estimates for the force F

We define the nonnegative real number $\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)$ by

$$\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) = \max\left(\sup_{\substack{x\in\Omega\\ \alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\\ |\alpha|\le 2}} |\partial_x^\alpha \tilde{V}(x)|,\ \sup_{\substack{x\in\Omega\\ \alpha'\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\\ |\alpha'|\le 1}} |\partial_x^{\alpha'} \tilde{B}_{i,j}(x)|\right). \tag{3.6.5}$$

The following estimates are valid :

$$|F(x,v)| \le n\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)(\frac{1}{c}|v|+1), \tag{3.6.6}$$

$$|F(x,v)-F(x',v')| \le n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\left[|x-x'|\left(1+\frac{|v'|}{c}\right)+\frac{1}{c}|v'-v|\right], \tag{3.6.7}$$

for $x,x'\in\Omega$ and $v,v'\in\mathbb{R}^n$.

3.6.3 Some constants

For $x\in\Omega$ and $E>c^2+\sup_{x'\in\Omega}V(x')$, we define the following real constants

$$C_1 = 2c^2+\sup_{x'\in\Omega}\left(\tilde V(x')+8|x'|\left(|\nabla\tilde V(x')|+\sum_{i,j=1\dots n}|\tilde B_{i,j}(x')|\right)\right), \tag{3.6.8}$$

$$C_2 = c^2\sqrt{1+\frac{800n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)^2\delta(\Omega)^2}{c^4}}+\sup_{x'\in\Omega}\tilde V(x'), \tag{3.6.9}$$

$$C_3 = C_4\left(1+5\delta(\Omega)C_5e^{5\delta(\Omega)C_5}\right) \tag{3.6.10}$$

$$\begin{aligned} C_4 = {} & \left(1+\frac{10\sqrt2 n^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}e^{\frac{10\sqrt2\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}\right) \\ & \times\frac{10n^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}\left(5\delta(\Omega)+\frac{600n^{3/2}\delta(\Omega)^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}+24\right) \\ & +\frac{20\sqrt2 n^{5/2}\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}e^{\frac{10\sqrt2\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}+\frac{40n^{3/2}\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{c^2\sqrt{\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)^2-1}}, \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

$$\begin{aligned} C_5 = {} & \left(1+\frac{10\sqrt2 n^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}e^{\frac{10\sqrt2\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}\right) \\ & \times\frac{20n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x)}\left(1+\frac{120n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x)}\right), \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

$$C_6 = \inf_{x'\in\Omega}\left(\sqrt{1-\left(\frac{c^2}{E-\tilde V(x')}\right)^2}-\frac{20n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x')}\right), \tag{3.6.13}$$

$$\begin{aligned} C_7 = {} & \inf_{x'\in\Omega}\left(1-\frac{5(n+1)^{1/2}n^2\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x')}\right. \\ & \times\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)e^{\frac{10n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x')}\left(1+2cn^{1/2}e^{\frac{10n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)}{E-\tilde V(x')}}\right)} \\ & \left.\times\left[12\sqrt n+1+10\sqrt n\delta(\Omega)\right]\right). \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Now assume that Ω is a bounded strictly convex (in the strong sense) open domain of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary. Let χ_Ω be a C^2 defining function for Ω, i.e. $\Omega = \chi_\Omega^{-1}(]-\infty,0[)$ and $\partial\Omega = \chi_\Omega^{-1}(\{0\})$ and for all $x \in \partial\Omega$ $\nabla\chi_\Omega(x) \neq 0$ and the Hessian matrix $Hess\chi_\Omega(x)$ of χ_Ω at x satisfies the inequality $Hess\chi_\Omega(x)(v,v) > 0$ for all $v \in T_x\partial\Omega$, $v \neq 0$ (where $T_x\partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is the tangent space of $\partial\Omega$ at $x \in \partial\Omega$). For $E > c^2 + \sup_{x\in\Omega} \tilde{V}(x)$, we define the real constant $C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)$ by

$$C_8 = C_{10}(\Omega)\left(1 - \left(\frac{c^2}{E - \sup_{y\in\Omega}\tilde{V}(y)}\right)^2\right) - \frac{2nC_9(\Omega)\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)}{E - \sup_{y\in\Omega}\tilde{V}(y)}, \quad (3.6.15)$$

where $C_9(\Omega)$ and $C_{10}(\Omega)$ are the two positive real numbers defined by

$$C_9(\Omega) = \sup_{x\in\partial\Omega} |\nabla\chi_\Omega(x)|, \quad (3.6.16)$$

$$C_{10}(\Omega) = \inf_{x\in\partial\Omega,\ v\in\mathbb{S}^{n-1}\cap T_x\partial\Omega} |Hess\chi_\Omega(x)(v,v)|. \quad (3.6.17)$$

Note that from (3.6.10)-(3.6.15), it follows that

$$\begin{array}{l} \sup_{x\in\Omega} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) \to 0,\ \text{as } E \to +\infty, \\ C_6(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) \to 1 > 0,\ \text{as } E \to +\infty, \\ C_7(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) \to 1 > 0,\ \text{as } E \to +\infty, \\ C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) \to C_{10}(\Omega) > 0,\ \text{as } E \to +\infty. \end{array} \quad (3.6.18)$$

When Ω is strictly convex in the strong sense with C^2 boundary, then one can relate an upper bound for the real constant $E(\|\tilde{V}\|_{C^2,\Omega}, \|\tilde{B}\|_{C^1,\Omega}, \Omega)$ (mentioned in Subsection 3.2.1) with constants C_1, C_2, $\sup_{x\in\Omega} C_3$, C_6, C_7 and C_8 (see Subsections 3.6.4 and 3.6.5).

Remark 3.6.1. We remind that $\tilde{V}$ is a C^2 continuation of V on $\mathbb{R}^n$ and that $\tilde{B} \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ is such that $\tilde{B} \equiv B$ on $\bar{D}$. Note that from (3.6.8)-(3.6.15) it follows that $C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, D)$, $C_2(\tilde{V}, \tilde{B}, D)$, $\sup_{x\in D} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, D)$, $C_6(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D)$, $C_7(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D)$ and $C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D)$ depend only on (V, B) and D.

3.6.4 Properties of the first component of the flow of (3.6.2) at fixed and sufficiently large energy E

The following Proposition 3.6.1 gives an upper bound for living time for solutions of (3.6.2) with energy E when E is sufficiently large.

Proposition 3.6.1. *Let*

$$E \geq C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega), \quad (3.6.19)$$

where C_1 is defined by (3.6.8). *Let $x :]t_-, t_+[\to \Omega$ be a solution of* (3.6.2) *with energy E, where $t_\pm \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Then the following statement holds : t_-, t_+ are finite and they satisfy the following estimate*

$$|t_+ - t_-| \leq \frac{5\delta(\Omega)}{c}, \tag{3.6.20}$$

where $\delta(\Omega)$ is defined by (3.6.1).

A proof of Proposition 3.6.1 is given in Subsection 3.6.6.

For $E \geq C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)$ (C_1 is defined by (3.6.8)) and for $(x,p) \in \mathcal{V}_E$, we define the real numbers $t_{+,x,p}$ and $t_{-,x,p}$ by

$$t_{+,x,p} = \sup\{t > 0 \mid (t,x,p) \in \Lambda\}, \tag{3.6.21}$$
$$t_{-,x,p} = \inf\{t < 0 \mid (t,x,p) \in \Lambda\}. \tag{3.6.22}$$

The following Proposition 3.6.2 gives, in particular, a one-to-one property of the map φ_E defined by (3.6.4).

Proposition 6.2. *Let*

$$E \geq \max(C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega), C_2(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)), \tag{3.6.23}$$

where constants C_1 and C_2 are defined by (3.6.8) *and* (3.6.9). *Let $x \in \Omega$ and let $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$ (defined by* (3.5.5)*). Then the following estimate is valid :*

$$||\psi_1(t_1, x, p_1) - \psi_1(t_2, x, p_2)| - |t_1 v_1 - t_2 v_2|| \leq C_3 |t_1 v_1 - t_2 v_2|, \tag{3.6.24}$$

for $(t_1, t_2) \in [0, t_{+,x,p_1}[\times [0, t_{+,x,p_2}[$, where $v_i = \frac{p_i}{\sqrt{1 - \frac{p_i^2}{c^2}}}$, $i = 1, 2$, and where $C_3 = C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)$ is defined by (3.6.10).

A proof of Proposition 3.6.2 is given in Subsection 3.6.7. We remind that

$$\sup_{x \in \Omega} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) \to 0, \text{ as } E \to +\infty \text{ (see (3.6.18))}. \tag{3.6.25}$$

Taking account of (3.6.25) and the equality $\psi_1(0, x, p) = x$ for any $(x,p) \in \mathcal{V}_E$ and taking account of Proposition 3.6.2, we obtain that at fixed and sufficiently large energy E the map φ_E defined by (3.6.4) is one-to-one and its range is included in $(\Omega \times \Omega) \backslash \{(x,x) \mid x \in \Omega\}$.

The following Proposition 3.6.3 is proved in Subsection 3.6.8.

Proposition 3.6.3. *Assume that*

$$\begin{aligned} &E \geq C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega), \\ &E \geq c^2 \sqrt{1 + \tfrac{400 n^2 \beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)^2 \delta(\Omega)^2}{c^4}} + \sup\nolimits_{x \in \Omega} \tilde{V}(x), \\ &\min(C_6(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega), C_7(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)) > 0, \end{aligned} \tag{3.6.26}$$

where C_1, C_6 *and* C_7 *are defined by* (3.6.8)*,* (3.6.13) *and* (3.6.14)*. Then the map* φ_E *defined by* (3.6.4) *is a local* C^1 *diffeomorphism at any point* $(t,x,p) \in \Lambda \cap (]0,+\infty[\times \mathcal{V}_E)$ *.*

Now assume that Ω is a bounded strictly convex (in the strong sense) open domain of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary. Let χ_Ω be a C^2 defining function for Ω. For $E > c^2 + \sup_{x\in\Omega} \tilde{V}(x)$, real constant $C_8(E,\tilde{V},\tilde{B},\Omega)$ is defined by (3.6.15) with respect to χ_Ω.

The following Proposition 3.6.4 gives a surjectivity property of the map φ_E defined by (3.6.4) at fixed and sufficiently large energy E.

Proposition 3.6.4. *Let*

$$\begin{aligned}
&E \geq C_1(\tilde{V},\tilde{B},\Omega),\\
&E \geq c^2\sqrt{1+\tfrac{400n^2\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)^2\delta(\Omega)^2}{c^4}} + \sup_{x\in\Omega}\tilde{V}(x),\\
&\min(C_6(E,\tilde{V},\tilde{B},\Omega),C_7(E,\tilde{V},\tilde{B},\Omega),C_8(E,\tilde{V},\tilde{B},\Omega)) > 0.
\end{aligned}\tag{3.6.27}$$

where C_1, C_6, C_7 *and* C_8 *are defined by* (3.6.8)*,* (3.6.13)*,* (3.6.14) *and* (3.6.15)*.*

Then $(\Omega\times\Omega)\backslash\{(x,x) \mid x\in\Omega\}$ *is included in the range of the map* φ_E *defined by* (3.6.4)*.*

A proof of Proposition 3.6.4 is given in Subsection 3.6.9.

Taking account of Propositions 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4, we obtain, in particular, that at fixed and sufficiently large energy E the map φ_E defined by (3.6.4) is a C^1 diffeomorphism from $\Lambda \cap (]0,+\infty[\times\mathcal{V}_E)$ onto $(\Omega\times\Omega)\backslash\{(x,x) \mid x\in\Omega\}$.

Now we are ready to prove Properties (3.2.1) and (3.2.2).

3.6.5 Final part of the proof of Properties (3.2.1) and (3.2.2)

Let χ_D be a C^2 defining function for D, i.e. $\chi_D \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ and $D = \chi_D^{-1}(]-\infty,0[)$, and $\partial D = \chi_D^{-1}(\{0\})$, and for all $x \in \partial D$ $\nabla\chi_D(x) \neq 0$ and the Hessian matrix $Hess\chi_D(x)$ of χ_D at x satisfies the inequality $Hess\chi_D(x)(v,v) > 0$ for all $v \in T_x\partial D$, $v \neq 0$ (where $T_x\partial D \subseteq \mathbb{R}^n$ is the tangent space of ∂D at $x\in\partial D$).

Let $x_0 \in D$. For $\varepsilon > 0$, we define the open neighborhood Ω_ε of $\bar{D}$ by $\Omega_\varepsilon = \{x_0 + (1+\varepsilon)(x'-x_0) \mid x' \in D\}$. Then Ω_ε is also a bounded strictly convex in the strong sense open domain of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary and the map $\chi_{\Omega_\varepsilon} \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ defined by $\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) = \chi_D(x_0 + \frac{x-x_0}{1+\varepsilon}),\ x\in\mathbb{R}^n$, is a C^2 defining function for Ω_ε. In addition, note that

$$\begin{aligned}
&x\in\partial\Omega_\varepsilon \Leftrightarrow x_0+\tfrac{x-x_0}{1+\varepsilon}\in\partial D,\\
&\nabla\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) = (1+\varepsilon)^{-1}\nabla\chi_D(x_0+\tfrac{x-x_0}{1+\varepsilon}),\ x\in\mathbb{R}^n,\\
&Hess\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) = (1+\varepsilon)^{-2}Hess\chi_D(x_0+\tfrac{x-x_0}{1+\varepsilon}),\ x\in\mathbb{R}^n,\\
&\sup_{x\in\Omega_\varepsilon}\big(\inf\{|x-y| \mid y\in\bar{D}\}\big) = \varepsilon\sup\{|x-x_0| \mid x\in D\} \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}\tag{3.6.28}$$

Note also that $\Omega_{\varepsilon_2} \subseteq \Omega_{\varepsilon_1}$ if $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Let $E > c^2 + \sup_{x \in D} V(x)$. Assume that

$$\begin{array}{l} E > \max(C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, D), C_2(\tilde{V}, \tilde{B}, D)), \\ \sup_{x \in \Omega} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, D) < 1, \\ \min(C_6(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D), C_7(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D), C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D)) > 0, \end{array} \tag{3.6.29}$$

where C_1, C_2, C_3, C_6, C_7 and C_8 are defined by (3.6.8), (3.6.9), (3.6.10), (3.6.13), (3.6.14) and (3.6.15) (taking account of (3.6.18), we obtain that if E is sufficiently large, then (3.6.29) is satisfied).

Let $\varepsilon > 0$. We denote by Λ_ε the open subset of $\mathbb{R} \times \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^n$ defined by $\Lambda_\varepsilon = \{(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \mid \forall s \in [0, t]\ \psi_1(s, x, p) \in \Omega_\varepsilon\}$, and we denote by $\mathcal{V}_{E,\varepsilon}$ the following smooth $2n-1$-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$ $\mathcal{V}_{E,\varepsilon} = \{(x, p) \in \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \mid |p| = r_{\tilde{V},E}(x)\}$. From (3.6.28) and continuity of $\partial_x^\alpha \tilde{V}$ and $\partial_x^{\alpha'} \tilde{B}$ for $\alpha, \alpha' \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leq 2$, $|\alpha'| \leq 1$, and from (3.6.8)-(3.6.15), it follows that

$$\begin{array}{l} C_i(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega_\varepsilon) \to C_i(\tilde{V}, \tilde{B}, D), \text{ as } \varepsilon \to 0^+, \text{ for } i = 1, 2, \\ \sup\limits_{x \in \Omega_\varepsilon} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega_\varepsilon) \to \sup\limits_{x \in D} C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, D), \text{ as } \varepsilon \to 0^+, \\ C_i(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega_\varepsilon) \to C_i(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D), \text{ as } \varepsilon \to 0^+, \text{ for } i = 6, 7, 8. \end{array}$$

Taking also account of (3.6.29) and Propositions 6.2, 6.3, 6.4, we obtain that there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$\begin{array}{l} \varphi_E^\varepsilon : \Lambda_\varepsilon \cap (]0, +\infty[\times \mathcal{V}_{E,\varepsilon}) \to \Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon, (t, x, p) \mapsto (x, \psi_1(t, x, p)), \text{ is a} \\ C^1 \text{ diffeomorphism from } \Lambda_\varepsilon \cap (]0, +\infty[\times \mathcal{V}_{E,\varepsilon}) \text{ onto } (\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon) \backslash \{(x, x) \mid \\ x \in \Omega_\varepsilon\} \text{ for any } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \end{array} \tag{3.6.30}$$

Let $q_0, q \in \bar{D}$, $q_0 \neq q$. Let $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$. From (3.6.30), it follows that there exists an unique $p_{\varepsilon_1} \in \mathbb{S}^{n-1}_{q_0,E}$ and an unique positive real number t_{ε_1} such that $q = \psi_1(t_{\varepsilon_1}, q_0, p_{\varepsilon_1})$ and $(t_{\varepsilon_1}, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in \Lambda_{\varepsilon_1}$. Consider the function $m \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, defined by $m(t) = \chi_D(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))$, $t \in \mathbb{R}$. Derivating twice m, we obtain

$$\begin{array}{l} \ddot{m}(t) = Hess\chi_D(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))(g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1})), g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))) \quad (3.6.31) \\ + \left(1 + \dfrac{|\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1})|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \nabla\chi_D(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1})) \circ F\,(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}), \\ g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))) - \dfrac{\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}) \circ F\,(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}), g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1})))}{c^2 \left(1 + \frac{|\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1})|^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ \times \nabla\chi_D(\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1})) \circ \psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}), \end{array}$$

for $t \in \mathbb{R}$, where g is the function defined by (3.5.6) and $\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$ (we used (3.5.1)). In addition, note that using the fact that χ_D is a C^2 defining function of D, we obtain that for $t \in \mathbb{R}$

$$\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D \Leftrightarrow m(t) < 0,$$
$$\psi_1(t, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in \partial D \Leftrightarrow m(t) = 0.$$

Assume that there exists some $s \in]0, t_{\varepsilon_1}[$ such that $\psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \notin D$ (i.e. $m(s) \geq 0$). Let $s_0 = \sup\{s' \in [0, s] \mid \psi_1(s', x, p_{\varepsilon_1}) \in \bar{D}\}$. Hence

$$\psi_1(s_0, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in \partial D, \text{ (i.e. } m(s_0) = 0), \tag{3.6.32}$$
$$m(t) \leq 0, \text{ for } t \in [0, s_0]. \tag{3.6.33}$$

The Taylor expansion of m at s_0 is given by

$$m(t) = \dot{m}(s_0)(t - s_0) + \frac{1}{2}\ddot{m}(s_0)(t - s_0)^2 + o((t - s_0)^2), \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.34}$$

Hence if $\dot{m}(s_0) < 0$ then (3.6.34) contradicts (3.6.33). In addition, if $\dot{m}(s_0) = 0$, then $\psi_2(s_0, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in T_{\psi_1(s_0,q_0,p_{\varepsilon_1})}\partial D$, and from (3.6.32), (3.6.31), (3.5.2), and the estimates (3.6.6), $|g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))| < c$, and definition (3.6.15), it follows that $\ddot{m}(s_0) \geq c^2 C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D) > 0$ (we used (3.6.29)). Hence if $\dot{m}(s_0) = 0$, then $\ddot{m}(s_0) > 0$, and (3.6.34) contradicts (3.6.33). We finally prove that $\dot{m}(s_0) > 0$. Using also the equality $m(s_0) = 0$, we obtain that there exists $\varepsilon' > 0$ such that $s_0 + \varepsilon' < t_{\varepsilon_1}$ and $m(s_0 + \varepsilon') > 0$ which implies that $\psi_1(s_0 + \varepsilon', q_0, p_{\varepsilon_1}) \notin \bar{D}$. Then, due to $\sup_{z \in \Omega_\varepsilon} \inf\{|z - z'| \mid z' \in \bar{D}\} \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, there exists $\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1[$ such that $\psi_1(s_0 + \varepsilon', q_0, p_{\varepsilon_1}) \notin \Omega_{\varepsilon_2}$ and using also (3.6.30), we obtain that there exists $(p_{\varepsilon_2}, t_{\varepsilon_2}) \in \mathbb{S}^{n-1}_{q_0,E} \times]0, +\infty[$ such that $(p_{\varepsilon_2}, t_{\varepsilon_2}) \neq (p_{\varepsilon_1}, t_{\varepsilon_1})$ and $(t_{\varepsilon_2}, q_0, p_{\varepsilon_2}) \in \Lambda_{\varepsilon_2}$ and $q = \psi_1(t_{\varepsilon_2}, q_0, p_{\varepsilon_2})$, which contradicts unicity of $(p_{\varepsilon_1}, t_{\varepsilon_1})$.

We finally proved that

$$\psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D \text{ for all } s \in]0, t_{\varepsilon_1}[. \tag{3.6.35}$$

Now consider

$$t_2 = \sup\{t \in]0, +\infty[\mid \psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D \text{ for all } s \in]0, t]\}, \tag{3.6.36}$$
$$t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D \text{ for all } s \in [t, t_{\varepsilon_1}[\} \tag{3.6.37}$$

(using Proposition 6.1 and (3.6.29), we obtain that t_2 and t_1 are real numbers that satisfy $t_2 - t_1 \leq \frac{5\delta(D)}{c}$). Then for $i = 1, 2$, the Taylor expansion of m at t_i is given by

$$m(t) = \dot{m}(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2}\ddot{m}(t_i)(t - t_i)^2 + o((t - t_i)^2), \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.38}$$

Hence if $\dot{m}(t_2) < 0$ then (3.6.38) contradicts the fact that $\psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D$ for all $s \in [0, t_2[$. In addition, if $\dot{m}(t_2) = 0$, then $\psi_2(t_2, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in T_{\psi_1(t_2,q_0,p_{\varepsilon_1})}\partial D$, and from (3.6.32), (3.5.2), and the estimates (3.6.6), $|g(\psi_2(t, q_0, p_{\varepsilon_1}))| < c$, and definition (3.6.15), it follows that $\ddot{m}(t_2) \geq c^2 C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, D) > 0$ (we used

(3.6.29)). Hence if $\dot{m}(t_2) = 0$, then $\ddot{m}(t_2) > 0$, and (3.6.38) contradicts the fact that $\psi_1(s, q_0, p_{\varepsilon_1}) \in D$ for all $s \in [0, t_2[$. We finally prove that $\dot{m}(t_2) > 0$. We similarly obtain the estimate $\dot{m}(t_1) < 0$. We proved that $\dot{m}(t_2) > 0$ and $\dot{m}(t_1) < 0$, i.e.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t, q_0, p_{\varepsilon_1})_{|t=t_1} \circ N(t_1) < 0, \\ &\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t, q_0, p_{\varepsilon_1})_{|t=t_2} \circ N(t_2) > 0, \end{aligned} \tag{3.6.39}$$

where $N(t_i) = \frac{\nabla\chi_D(\psi_1(t,q_0,p_{\varepsilon_1}))}{\left|\nabla\chi_D(\psi_1(t,q_0,p_{\varepsilon_1}))\right|}$, $i = 1, 2$.

Statement (3.6.35) with (3.6.39) and (3.6.30) (with "$\varepsilon = \varepsilon_1$") proves (3.2.1) and (3.2.2). $\square$

3.6.6 Proof of Proposition 3.6.1

We denote $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$ by $p(t)$ for $t \in]t_-, t_+[$.

Let $I(t) = \frac{1}{2}|x(t)|^2$, for $t \in]t_-, t_+[$. Derivating twice I and using (3.6.2), we obtain

$$\begin{aligned} \ddot{I}(t) \;=\; & \frac{p(t)^2}{1+\frac{p(t)^2}{c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p(t)^2}{c^2}}} F\left(x(t), \frac{p(t)}{\sqrt{1+\frac{p(t)^2}{c^2}}}\right) \circ x(t) \\ & - \frac{p(t)\circ x(t)}{c^2(1+\frac{p(t)^2}{c^2})^{3/2}} p(t) \circ F\left(x(t), \frac{p(t)}{\sqrt{1+\frac{p(t)^2}{c^2}}}\right) \end{aligned} \tag{3.6.40}$$

for $t \in]t_-, t_+[$, where $\circ$ denotes the usual scalar product in $\mathbb{R}^n$. From the estimate $\frac{|p(t)|}{\sqrt{1+\frac{p(t)^2}{c^2}}} < c$, $t \in]t_-, t_+[$, and from (3.6.40) and (3.5.2), it follows that $\ddot{I}(t) \geq c^2\left(1 - \frac{1}{(\frac{E-\tilde{V}(x(t))}{c^2})^2}\right) - 2\frac{|x(t)|\left(|\nabla\tilde{V}(x(t))| + \sum_{i,j=1\ldots n}|\tilde{B}_{i,j}(x(t))|\right)}{\frac{E-\tilde{V}(x(t))}{c^2}}$, for $t \in]t_-, t_+[$, which with (3.6.19) implies

$$\ddot{I}(t) \geq \frac{c^2}{2}, \tag{3.6.41}$$

for $t \in]t_-, t_+[$.

Let $t, s \in]t_-, t_+[$, $s \leq t$. From (3.6.41) and the equality $I(t) = I(s) + \dot{I}(s)(t-s) + \int_s^t \int_s^\tau \ddot{I}(\sigma)d\sigma d\tau$, it follows that

$$I(t) - I(s) \geq \dot{I}(s)(t-s) + \frac{c^2}{4}(t-s)^2. \tag{3.6.42}$$

Using (3.6.1) and the estimate $|\dot{x}(s)| < c$, we obtain $\dot{I}(s) = x(s) \circ \dot{x}(s) \geq -|x(s)||\dot{x}(s)| \geq -c\delta(\Omega)$. Using (3.6.1), we obtain $I(t) - I(s) = \frac{1}{2}(|x(t)|^2 - |x(s)|^2) \leq \delta(\Omega)^2$. From (3.6.42) and the two latter inequalities, it follows that $0 \geq -\delta(\Omega)^2 - c\delta(\Omega)(t-s) + \frac{c^2}{4}(t-s)^2$, which implies that $t - s \leq \frac{\delta(\Omega)}{c}(2\sqrt{2}+2) <$

$\frac{5\delta(\Omega)}{c}$ (the roots of $-\delta(\Omega)^2 - c\delta(\Omega)X + \frac{c^2}{4}X^2$ are $(\delta(\Omega)/c)(2\pm 2\sqrt{2})$). As $t \to t_+$ and $s \to t_-$, the latter inequality proves (3.6.20). Proposition 3.6.1 is proved. $\square$

3.6.7 Proof of Proposition 3.6.2

Throughout this Subsection, we denote by $\gamma_{x,p_i}(t)$ the point of $\mathbb{R}^n$ defined by

$$\gamma_{x,p_i}(t) = \psi_1(t, x, p_i),$$

for any $t \in \mathbb{R}$ and $i = 1, 2$, where $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ is the flow of the differential system (3.5.1).

From (3.5.1), it follows that

$$\begin{aligned} \gamma_{x,p_i}(t) &= x + tv_i + \int_0^{t_i} \Big(g(p_i + \int_0^{\sigma} F(\gamma_{x,p_i}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_i}(\tau))d\tau) \\ &\quad -g(p_i)\Big)\, d\sigma \end{aligned} \tag{3.6.43}$$

for $t \in [0, t_{+,x,p_i}[$ and $i = 1, 2$, where t_{+,x,p_i} is defined by (3.6.21) for $i = 1, 2$.

From (3.6.43), it follows that

$$|t_1v_1 - t_2v_2| - \Delta(t_1, t_2) \le |\gamma_{x,p_1}(t_1) - \gamma_{x,p_2}(t_2)| \le |t_1v_1 - t_2v_2| + \Delta(t_1, t_2) \tag{3.6.44}$$

where

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, t_2) = \Bigg| &\int_0^{t_1} \left(g(p_1 + \int_0^{\sigma} F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_1}(\tau))d\tau) - g(p_1) \right) d\sigma \\ &- \int_0^{t_2} \left(g(p_2 + \int_0^{\sigma} F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))d\tau) - g(p_2) \right) d\sigma \Bigg|, \end{aligned} \tag{3.6.45}$$

for $t_1 \in [0, t_{+,x,p_1}[$ and $t_2 \in [0, t_{+,x,p_2}[$. We shall look for an upper bound of $\Delta(t_1, t_2)$, $t_1 \in [0, t_{+,x,p_1}[$ and $t_2 \in [0, t_{+,x,p_2}[$, $t_2 \le t_1$.

First case : $v_1 \circ v_2 \le 0$. Using (3.5.8), we obtain that

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_i} \left(g(p_i + \int_0^{\sigma} F(\gamma_{x,p_i}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_i}(\tau))d\tau) - g(p_i) \right) d\sigma \right| \\ &\le \sqrt{n} \int_0^{t_i} \sup_{\varepsilon \in [0,1]} \left(1 + c^{-2} \left| p_i + \varepsilon \int_0^{\sigma} F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot{\gamma}_{x,p_i}(s))ds \right|^2 \right)^{-1/2} \\ &\qquad \times \int_0^{\sigma} |F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot{\gamma}_{x,p_i}(s))| ds d\sigma, \end{aligned} \tag{3.6.46}$$

for $i = 1, 2$. From (3.6.6) and (3.6.20) and from the estimate $|g(\psi_2(s, x, p_i))| \le c$, it follows that

$$\int_0^{\sigma} |F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot{\gamma}_{x,p_i}(s))| ds \le \frac{10n\delta(\Omega)\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)}{c}. \tag{3.6.47}$$

for $\sigma \in [0, t_i]$, $i = 1, 2$. Using $p_i \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$ and (3.6.47) and (3.6.23), we obtain

$$\left|p_i + \varepsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot\gamma_{x,p_i}(s))ds\right| \geq \frac{1}{2} r_{\tilde V,E}(x), \tag{3.6.48}$$

for $\varepsilon \in [0, 1]$ and $\sigma \in [0, t_i]$. From (3.6.47), (3.6.48) and (3.6.46), it follows that

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{t_i} \left(g(p_i + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot\gamma_{x,p_i}(s))ds) - g(p_i)\right) d\sigma\right| \\ \leq\ & t_i \frac{20n^{3/2} c\delta(\Omega)\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega)}{E - \tilde V(x)}, \end{aligned} \tag{3.6.49}$$

for $i = 1, 2$. Using $v_1 \circ v_2 \leq 0$, we obtain that $|v_i|s_i \leq |s_1 v_1 - s_2 v_2|$ for $i = 1, 2$ and for $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$. Using this latter inequality and (3.6.45) and (3.6.49) and equality $|v_i| = c\sqrt{1 - \left(\frac{E - \tilde V(x)}{c^2}\right)^{-2}}$, we obtain

$$\Delta(t_1, t_2) \leq 40c^{-1} n^{3/2} \delta(\Omega)\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega) r_{\tilde V,E}(x)^{-1} |t_1 v_1 - t_2 v_2|.$$

Second case : $v_1 \circ v_2 \geq 0$.
From (3.6.45), it follows that

$$\Delta(t_1, t_2) \leq \Delta_1(t_1, t_2) + \Delta_2(t_1, t_2), \tag{3.6.50}$$

where

$$\Delta_1(t_1, t_2) = \left|\int_{t_2}^{t_1} \left(g(p_1 + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot\gamma_{x,p_1}(\tau))d\tau) - g(p_1)\right) d\sigma\right| \tag{3.6.51}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(t_1, t_2) = &\left|\int_0^{t_2} \left[g(p_1 + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot\gamma_{x,p_1}(\tau))d\tau) - g(p_1)\right.\right. \\ &- \left.\left.\left(g(p_2 + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot\gamma_{x,p_2}(\tau))d\tau) - g(p_2)\right)\right] d\sigma\right|. \end{aligned} \tag{3.6.52}$$

An upper bound for $\Delta_1(t_1, t_2)$. Using (3.6.51) and (3.5.8), we obtain that

$$\begin{aligned} \Delta_1(t_1, t_2) \leq\ & \sqrt{n}(t_1 - t_2) \int_{t_2}^{t_1} |F(\gamma_{x,p_1}(s), \dot\gamma_{x,p_1}(s))|ds \\ \times \sup_{\substack{\varepsilon\in[0,1] \\ \sigma\in[0,t_1]}} & \left(1 + c^{-2}\left|p_1 + \varepsilon\int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(s), \dot\gamma_{x,p_1}(s))ds\right|^2\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.6.53}$$

In the same manner than in the first case ($v_1 \circ v_2 \leq 0$), we obtain

$$\Delta_1(t_1, t_2) \leq (t_1 - t_2)\frac{20n^{3/2} c\delta(\Omega)\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega)}{E - \tilde V(x)}. \tag{3.6.54}$$

Note that from $|v_1| = |v_2|$ and $t_i \geq 0, i = 1, 2$, it follows that $|v_1|(t_1 - t_2) \leq |t_1 v_1 - t_2 v_2|$. Using this latter inequality with (3.6.54), we obtain

$$\Delta_1(t_1, t_2) \leq \frac{20n^{3/2}\delta(\Omega)\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)}{c r_{\tilde{V},E}(x)} |t_1 v_1 - t_2 v_2| \tag{3.6.55}$$

(we use the equality $|v_1| = c\sqrt{1 - \left(\frac{E - \tilde{V}(x)}{c^2}\right)^{-2}}$).

An upper bound for $\Delta_2(t_1, t_2)$. Note that $g_j(p_i + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_i}(\tau))d\tau)$ $-g_j(p_i) = \int_0^1 \nabla g_j(p_i + \varepsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_i}(\tau))d\tau) \circ \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(s), \dot{\gamma}_{x,p_i}(s))ds\, d\varepsilon$ for $i = 1, 2$ and $j = 1..n$, where $g = (g_1, \ldots, g_n)$. Hence

$$\Delta_2^j(t_1, t_2) \leq \int_0^{t_2} \Delta_{2,1,j}(\sigma)d\sigma + \int_0^{t_2} \Delta_{2,2,j}(\sigma)d\sigma, \tag{3.6.56}$$

where $\Delta_2(t_1, t_2) = (\Delta_2^1(t_1, t_2), \ldots, \Delta_2^n(t_1, t_2))$ and

$$\Delta_{2,1,j}(\sigma) = \Big| \int_0^1 \Big[\nabla g_j(p_1 + \varepsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_1}(\tau))d\tau) - \nabla g_j \tag{3.6.57}$$
$$(p_2 + \varepsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))d\tau) \Big] \circ \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(s), \dot{\gamma}_{x,p_1}(s)) ds d\varepsilon \Big|,$$
$$\Delta_{2,2,j}(\sigma) = \Big| \int_0^1 \nabla g_j(p_2 + \varepsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))d\tau) \circ \tag{3.6.58}$$
$$\int_0^\sigma \left[F(\gamma_{x,p_1}(s), \dot{\gamma}_{x,p_1}(s)) - F(\gamma_{x,p_2}(s), \dot{\gamma}_{x,p_2}(s)) \right] ds d\varepsilon \Big|$$

for $\sigma \in [0, t_2]$ and $j = 1 \ldots n$.

We first look for an upper bound for $\Delta_{2,1,j}(\sigma)$. Since $v_1 \circ v_2 \geq 0$, we obtain $p_1 \circ p_2 \geq 0$. Using this latter inequality and the equality $p_1^2 = p_2^2$, we obtain that

$$\begin{aligned} |\mu p_1 + (1-\mu)p_2| &= \sqrt{\mu^2 p_1^2 + (1-\mu)^2 p_2^2 + 2\mu(1-\mu) p_1 \circ p_2} \\ &\geq \sqrt{\mu^2 p_1^2 + (1-\mu)^2 p_2^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |p_1| = \frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{3.6.59}$$

for any $\mu \in [0, 1]$.

From (3.6.47) and (3.6.59) and (3.6.23), it follows that

$$\begin{aligned} &\Big| \mu p_1 + (1-\mu)p_2 + \mu\epsilon \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_1}(\tau))d\tau + (1-\mu)\epsilon \\ &\times \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))d\tau \Big| \geq |\mu p_1 + (1-\mu)p_2| - \frac{10n\delta(\Omega)\beta(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega)}{c} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} r_{\tilde{V},E}(x), \end{aligned} \tag{3.6.60}$$

for μ, $\epsilon \in [0,1]$. From (3.5.1), it follows that

$$\dot\gamma_{x,p_i}(\sigma) = g(p_i + \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_i}(\tau), \dot\gamma_{x,p_i}(\tau))d\tau)$$

for $\sigma \in [0, t_i]$, $i = 1, 2$. Using this latter equality and (3.5.8), we obtain

$$\begin{aligned} &|\dot\gamma_{x,p_1}(\sigma) - \dot\gamma_{x,p_2}(\sigma)| \leq \\ &\sqrt{n} \sup_{\mu\in[0,1]} \Big(1 + c^{-2}|\mu p_1 + (1-\mu)p_2 + \mu \int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot\gamma_{x,p_1}(\tau))d\tau \\ &+ (1-\mu)\int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot\gamma_{x,p_2}(\tau))d\tau|^2\Big)^{-1/2} \\ &\times|p_1 - p_2 + \int_0^\sigma \left(F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot\gamma_{x,p_1}(\tau)) - F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot\gamma_{x,p_2}(\tau))\right) d\tau| \end{aligned} \quad (3.6.61)$$

for $\sigma \in [0, t_2]$.

Note that from (3.6.7) and the inequality $|\dot\gamma_{x,p_2}(\tau)| \leq c$, it follows that

$$\begin{aligned} &|F(\gamma_{x,p_1}(\tau), \dot\gamma_{x,p_1}(\tau)) - F(\gamma_{x,p_2}(\tau), \dot\gamma_{x,p_2}(\tau))| \leq \\ &n^{3/2}\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega)(2|\gamma_{x,p_1}(\tau) - \gamma_{x,p_2}(\tau)| + \frac{1}{c}|\dot\gamma_{x,p_1}(\tau) - \dot\gamma_{x,p_2}(\tau)|), \end{aligned} \quad (3.6.62)$$

for $\tau \in [0, t_2]$.

Using (3.6.60)-(3.6.62), we obtain

$$\begin{aligned} |\dot\gamma_{x,p_1}(\sigma) - \dot\gamma_{x,p_2}(\sigma)| \leq \frac{2^{3/2}\sqrt{n}c^2}{E - \tilde V(x)} \Big[|p_1 - p_2| + n^{3/2}\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega) \\ \left(2\int_0^\sigma |\gamma_{x,p_1}(\tau) - \gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau + \frac{1}{c}\int_0^\sigma |\dot\gamma_{x,p_1}(\tau) - \dot\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau\right)\Big], \end{aligned} \quad (3.6.63)$$

for $\sigma \in [0, t_2]$.

We shall use the following Gronwall's lemma.

Gronwall's lemma. *Let $a > 0$ and let $\phi \in C([0,a], [0, +\infty[)$ be a continuous map and let $A, B \in [0, +\infty[$ be such that $\phi(t) \leq A + B\int_0^t \phi(s)ds$ for all $t \in [0, a]$. Then $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$ for all $t \in [0, a]$.*

Taking account of (3.6.63), Gronwall's lemma and (3.6.20), we obtain that

$$\begin{aligned} |\dot\gamma_{x,p_1}(\sigma) - \dot\gamma_{x,p_2}(\sigma)| \ &\leq \ \frac{2^{3/2}\sqrt{n}c^2}{E - \tilde V(x)} \Big[|p_1 - p_2| + 2n^{3/2}\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega) \\ &\int_0^\sigma |\gamma_{x,p_1}(\tau) - \gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau\Big] e^{\frac{10\sqrt{2}\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V, \tilde B, \Omega)}{E - \tilde V(x)}}, \end{aligned} \quad (3.6.64)$$

for $\sigma \in [0, t_2]$.

From (3.5.9) and (3.6.57), it follows that

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{2,1,j}(\sigma) \leq \qquad\qquad (3.6.65)\\
&\frac{3\sqrt{n}}{c}\int_0^1 \sup_{\mu\in[0,1]}\left(1+\frac{1}{c^2}\left|\mu p_1+(1-\mu)p_2+\mu\epsilon\int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_1}(\tau),\dot{\gamma}_{x,p_1}(\tau))d\tau\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+(1-\mu)\epsilon\int_0^\sigma F(\gamma_{x,p_2}(\tau),\dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))d\tau\right|^2\right)^{-1}\\
&\qquad\times|p_1-p_2+\varepsilon\int_0^\sigma\left(F(\gamma_{x,p_1}(\tau),\dot{\gamma}_{x,p_1}(\tau))-F(\gamma_{x,p_2}(\tau),\dot{\gamma}_{x,p_2}(\tau))\right)d\tau|\\
&\qquad\times\int_0^\sigma|F(\gamma_{x,p_1}(s),\dot{\gamma}_{x,p_1}(s))|dsd\varepsilon,
\end{aligned}
$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

From (3.6.6) and the estimate $|\dot{\gamma}_{x,p_1}(s)|\leq c$, it follows that

$$
\int_0^\sigma|F(\gamma_{x,p_1}(s),\dot{\gamma}_{x,p_1}(s))|ds\leq 2n\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)\sigma. \qquad (3.6.66)
$$

for $\sigma\in[0,t_1]$.

From (3.6.65), (3.6.60), (3.6.66) and (3.6.62) and (3.6.64), it follows that

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{2,1,j}(\sigma)\leq\frac{48n^{3/2}c^3\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)}{(E-\tilde{V}(x))^2}\Big(|p_1-p_2|\sigma+n^{3/2}\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)\sigma \qquad (3.6.67)\\
&\left(2\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau+\frac{2^{3/2}\sqrt{n}c}{E-\tilde{V}(x)}\Big(|p_1-p_2|\sigma+2n^{3/2}\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)\right.\\
&\left.\int_0^\sigma\int_0^s|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau ds\right)\times e^{\frac{10\sqrt{2}\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)}{E-\tilde{V}(x)}}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

From $|v_1|=|v_2|$ and $t_2\leq t_1$, it follows that $|v_1-v_2|\sigma\leq|v_1-v_2|t_2\leq|t_1v_1-t_2v_2|$, for $\sigma\in[0,t_2]$. Note that using these latter estimates and $p_i\in\mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$, $i=1,2$, we obtain

$$
|p_1-p_2|\sigma\leq\frac{E-\tilde{V}(x)}{c^2}|t_1v_1-t_2v_2|, \qquad (3.6.68)
$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

Using (3.6.68), the estimate $\int_0^\sigma\int_0^s|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau ds\leq\sigma\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)$

$-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau$ and $\sigma \le \frac{5\delta(\Omega)}{c}$ (due to (3.6.20)) and (3.6.67), we obtain

$$\begin{aligned}\Delta_{2,1,j}(\sigma) \le & \left(1 + \frac{10\sqrt{2}n^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)} e^{\frac{10\sqrt{2}\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}\right)\\ &\times\left(\frac{48n^{3/2}c\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}|t_1v_1-t_2v_2|\right.\\ &\left.+\frac{480n^3c^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)^2}{(E-\tilde V(x))^2}\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau\right)\end{aligned} \tag{3.6.69}$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

We look for an upper bound for $\Delta_{2,2,j}(\sigma)$, $\sigma\in[0,t_2]$, defined by (3.6.58). Using (3.6.58), (3.5.7), and (3.6.48), and using (3.6.62), (3.6.64) and (3.6.68), we obtain

$$\begin{aligned}\Delta_{2,2,j}(\sigma) \le & \left(1 + \frac{10\sqrt{2}n^2\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)} e^{\frac{10\sqrt{2}\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}\right)\\ &\times\frac{4n^{3/2}c^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau\\ &+\frac{2^{5/2}n^2c\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}e^{\frac{10\sqrt{2}\delta(\Omega)n^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}}|t_1v_1-t_2v_2|,\end{aligned} \tag{3.6.70}$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

Note also that from (3.6.44), it follows that $\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau \le \int_0^\sigma\Delta(\tau,\tau)d\tau+\frac{\sigma^2}{2}|v_1-v_2|$, for $\sigma\in[0,t_2]$. Hence using also $\sigma\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}$ (due to (3.6.20)) and $\sigma|v_1-v_2|\le|t_1v_1-t_2v_2|$, we obtain

$$\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau\le\int_0^\sigma\Delta(\tau,\tau)d\tau+\frac{5\delta(\Omega)}{2c}|t_1v_1-t_2v_2|, \tag{3.6.71}$$

for $\sigma\in[0,t_2]$. Note that $t_2\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}$ and note that from positiveness of Δ it follows that $\int_0^{t_2}\int_0^\sigma\Delta(\tau,\tau)d\tau d\sigma \le t_2\int_0^{t_2}\Delta(\tau,\tau)d\tau$. Hence using (3.6.71), we obtain

$$\int_0^{t_2}\int_0^\sigma|\gamma_{x,p_1}(\tau)-\gamma_{x,p_2}(\tau)|d\tau d\sigma\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}\int_0^{t_2}\Delta(\tau,\tau)d\tau+\frac{25\delta(\Omega)^2}{2c^2}|t_1v_1-t_2v_2|, \tag{3.6.72}$$

for $\sigma\in[0,t_2]$.

Combining (3.6.50), (3.6.55), (3.6.69), (3.6.70) and (3.6.72), we obtain

$$\Delta(t_1,t_2)\le C_4(E,x,\tilde V,\tilde B,\Omega)|t_1v_1-t_2v_2|+cC_5(E,x,\tilde V,\tilde B,\Omega)\int_0^{t_2}\Delta(\tau,\tau)d\tau, \tag{3.6.73}$$

for $t_1 \in [0, t_{+,x,p_1}[$ and $t_2 \in [0, t_{+,x,p_2}[$, $t_1 \geq t_2$ and where C_4 and C_5 are defined by (3.6.11) and (3.6.12).

Let $t_1 \in [0, t_{+,x,p_1}[$ and $t_2 \in [0, t_{+,x,p_2}[$, $t_1 \geq t_2$. Estimates (3.6.73) and $|v_1 - v_2|\sigma \leq |t_1 v_1 - t_2 v_2|$, $\sigma \leq t_2$, give in particular

$$\Delta(\sigma, \sigma) \leq C_4 |t_1 v_1 - t_2 v_2| + c C_5 \int_0^\sigma \Delta(\tau, \tau) d\tau \qquad (3.6.74)$$

for $\sigma \in [0, t_2]$. Using (3.6.74) and using Gronwall's lemma (formulated above) and $\sigma \leq \frac{5\delta(\Omega)}{c}$, we obtain

$$\Delta(\sigma, \sigma) \leq C_4 e^{5\delta(\Omega) C_5} |t_1 v_1 - t_2 v_2|, \qquad (3.6.75)$$

for $\sigma \in [0, t_2]$.

Using (3.6.75) and (3.6.73) and $t_2 \leq \frac{5\delta(\Omega)}{c}$, we obtain $\Delta(t_1, t_2) \leq C_3(E, x, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) |t_1 v_1 - t_2 v_2|$, for $t_1 \in [0, t_{+,x,p_1}[$ and $t_2 \in [0, t_{+,x,p_2}[$, $t_1 \geq t_2$.

Proposition 3.6.2 is proved. □

3.6.8 Proof of Proposition 3.6.3

We shall work in local coordinates. We consider the following infinitely smooth parametrizations of $\mathbb{S}^{n-1}$, $\phi_{i,\pm} : B_{n-1}(0,1) \to \mathbb{S}^{n-1}$, $i = 1 \ldots n$, defined by

$$\phi_{i,\pm}(w) = \qquad (3.6.76)$$
$$\begin{cases} \left(w^1, \ldots, w^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{n-1} w^{l2}}, w^i, \ldots, w^{n-1} \right), & \text{if } 1 \leq i \leq n-1, \\ \left(w^1, \ldots, w^{n-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{n-1} w^{l2}} \right), & \text{if } i = n \end{cases}$$

for $w = (w^1, \ldots, w^{n-1}) \in B_{n-1}(0,1)$ and where $B_{n-1}(0,1)$ denotes the unit Euclidean open ball of $\mathbb{R}^{n-1}$ of center 0.

Let $(t_0, x_0, p_0) \in \Lambda \cap (]0, +\infty[\times \mathcal{V}_E)$, $p_0 = (p_0^1, \ldots, p_0^n)$. Then $(t, x_0, p_0) \in \Lambda$ for all $t \in [0, t_0]$. As Λ is an open subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, there exists $\varepsilon > 0$ such that $\{(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid -\varepsilon < t < t_0 + \varepsilon, \ \max(|x - x_0|, |p - p_0|) < \varepsilon\} \subseteq \Lambda$. We denote by $B(x_0, \varepsilon)$ the Euclidean open ball of $\mathbb{R}^n$ of center x_0 and radius ε. Let (U, ϕ) be an infinitely smooth parametrization of an open neighborhood of $\frac{p_0}{|p_0|}$ in $\mathbb{S}^{n-1}$, and $k = 1 \ldots n$ such that

$$U \text{ is an open subset of } B_{n-1}(0,1), \qquad (3.6.77)$$
$$|p_0^k| \geq n^{-1/2} |p_0|, \qquad (3.6.78)$$
$$\text{if } \pm p_0^k > 0 \text{ then } \phi(w) = \phi_{k,\pm}(w) \text{ for all } w \in U, \qquad (3.6.79)$$

$$(t, x, r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w)) \in \Lambda, \ \text{for } (w, t, x) \in U \times]-\varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \varepsilon). \qquad (3.6.80)$$

Consider $Q \in C^1(]-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U, \Omega)$ defined by

$$Q(t,x,w) = \psi_1(t,x,r_{\tilde V,E}(x)\phi(w)),\ (t,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U, \tag{3.6.81}$$

where $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ is the flow of the differential system (3.5.1). Let $w_0\in U$ be such that $\phi(w_0)=\frac{p_0}{|p_0|}$. We shall prove that $(\frac{\partial Q}{\partial t}(t_0,x_0,w_0), \frac{\partial Q}{\partial w^1}(t_0,x_0,w_0),\ldots, \frac{\partial Q}{\partial w^{n-1}}(t_0,x_0,w_0))$ is a basis of $\mathbb{R}^n$.

Note that from (3.6.2), it follows that

$$\begin{aligned} Q(t,x,w) = x + tg(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w)) + \int_0^t \Big[g\Big(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w) \\ + \int_0^\sigma F(Q(s,x,w),\frac{\partial Q}{\partial s}(s,x,w))ds\Big) - g(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w))\Big]\,d\sigma, \end{aligned} \tag{3.6.82}$$

for $w\in U$ and $(t,x)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)$ (where g, $r_{\tilde V,E}$ and F are defined by (3.5.6), (3.5.4) and (3.5.3)).

We shall prove (3.6.84).

Using (3.6.82) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x,w) &= g(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w)) + \Big[g\Big(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w) \\ &\quad + \int_0^t F(Q(s,x,w),\frac{\partial Q}{\partial s}(s,x,w))ds\Big) - g(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w))\Big], \end{aligned} \tag{3.6.83}$$

for $w\in U$ and $(t,x)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)$. Combining (3.6.83), (3.6.26), (3.5.8), (3.6.6) and estimates $|\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x,w)|\le c$, $t\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}$, it follows that

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x,w) - g(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w))\right| \le \frac{4n^{3/2}c^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}t, \tag{3.6.84}$$

for $w\in U$ and $(t,x)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)$.

We shall prove (3.6.95). Let $i=1\ldots n-1$. Let $X_i\in C(]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U,\mathbb{R}^n)$ be defined by

$$\begin{aligned} X_i^j(s,x,w) = \sum_{l=1}^n \Big(\frac{\partial F_j}{\partial x'_l}(x',\frac{\partial Q}{\partial s}(s,x,w))_{|x'=Q(s,x,w)}\frac{\partial Q_l}{\partial w^i}(s,x,w) \\ + \frac{\partial F_j}{\partial y'_l}(Q(s,x,w),y')_{|y'=\frac{\partial Q}{\partial s}(s,x,w)}\frac{\partial \bar Q_l}{\partial w^i}(s,x,w)\Big), \end{aligned} \tag{3.6.85}$$

for $j=1\ldots n$, $(s,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$, and where $X_i=(X_i^1,\ldots,X_i^n)$ and $\bar Q\in C^1(]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U,\mathbb{R})$ is defined by

$$\bar Q(s,x,w) = g(\psi_2(s,x,r_{\tilde V,E}(x)\phi(w))) = \frac{\partial Q}{\partial s}(s,x,w), \tag{3.6.86}$$

for $(s,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$.

From (3.6.5), and (3.5.3), it follows that

$$|X_i(\sigma,x,w)| \leq \beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)n\left(2\sqrt{n}\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right| + c^{-1}\left|\frac{\partial \bar{Q}}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|\right), \tag{3.6.87}$$

for $(\sigma,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$.

We shall estimate $\bar{Q}$. Note that from (3.6.2), it follows that $\bar{Q}_l(s,x,w) = g_l(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w) + \int_0^s F(Q(\sigma,x,w),\bar{Q}(\sigma,x,w))d\sigma)$, for $(s,\ x,w)\ \in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$ and $l=1\ldots n$. From this latter equality and (3.6.85), it follows that

$$\frac{\partial \bar{Q}_l}{\partial w^i}(s,x,w) = \nabla g_l\left(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w) + \int_0^s F(Q(\sigma,x,w),\right.$$
$$\left.\bar{Q}(\sigma,x,w))d\sigma\right)\circ\left(r_{\tilde{V},E}(x)\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w) + \int_0^s X_i(\sigma,x,w)d\sigma\right),$$

for $(s,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$. Hence

$$\left|\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial w^i}(s,x,w) - r_{\tilde{V},E}(x)\nabla g_j(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w))\circ\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right| \leq \tag{3.6.88}$$
$$r_{\tilde{V},E}(x)\left|\left(\nabla g_j\left(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w) + \int_0^s F(Q(\sigma,x,w),\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\bar{Q}(\sigma,x,w))d\sigma\right) - \nabla g_j\left(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w)\right)\right)\circ\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\Bigg|$$
$$+\left|\nabla g_j\left(r_{\tilde{V},E}(x)\phi(w) + \int_0^s F(Q(\sigma,x,w),\bar{Q}(\sigma,x,w))d\sigma\right)\right.$$
$$\left.\circ\int_0^s X_i(\sigma,x,w)d\sigma\right|,$$

for $j=1\ldots n$ and $(s,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$. We estimate the second term of the sum on the right-hand side of (3.6.88) by using (3.5.7), (3.6.6), (3.6.26) and $s\leq\frac{5\delta(\Omega)}{c}$, and (3.6.87). We estimate the first term of the sum on the right-hand side of (3.6.88) by using (3.5.9) and (3.6.6), (3.6.26) and $s\leq\frac{5\delta(\Omega)}{c}$, and the estimate $\int_0^s F(Q(\sigma,x,w),\bar{Q}(\sigma,x,w))d\sigma \leq 2n\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)s$, for $(s,x,w)\in]-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$. We obtain

$$\left|\frac{\partial \bar{Q}}{\partial w^i}(s,x,w) - \frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde{V}(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right| \leq 2n\sqrt{n}c^3\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)\left(12\sqrt{n}+1\right)$$
$$\times\frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{\left(E-\tilde{V}(x)\right)^2}|\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)|s + \frac{2c^2\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)n\sqrt{n}}{E-\tilde{V}(x)}\left(\int_0^s\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|d\sigma\right.$$
$$\left.\times 2\sqrt{n} + c^{-1}\int_0^s\left|\frac{\partial \bar{Q}}{\partial w^i}(\sigma,x,w) - \frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde{V}(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|d\sigma\right),$$

for $(s,x,w)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$ (note that $\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)$ $=\left(\nabla g_j(r_{\tilde V,E}(x)\phi(w))\circ\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right)_{j=1\dots n}$).

From Gronwall's lemma (formulated in Subsection 3.6.7) and $t_0+\varepsilon\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}$, it follows that

$$\left|\frac{\partial\bar Q}{\partial w^i}(s,x,w)-\frac{r_{\tilde V,E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|\le\frac{2c^2n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}e^{\frac{10\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)n^{3/2}}{E-\tilde V(x)}}\tag{3.6.89}$$
$$\times\left[c\left(12\sqrt n+1\right)\frac{r_{\tilde V,E}(x)}{E-\tilde V(x)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|s+2\sqrt n\int_0^s\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|d\sigma\right],$$

for $(s,x,w)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$.

From (3.6.86), it follows that $Q(s,x,w)=x+\int_0^s\bar Q(\sigma,x,w)d\sigma$, for (s,x,w) $\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$. Hence $\frac{\partial Q}{\partial w^i}(s,x,w)=\int_0^s\frac{\partial\bar Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)d\sigma$, for (s,x,w) $\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$. This latter equality and (3.6.89) imply

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(s,x,w)-\frac{r_{\tilde V,E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)s\right|\le\frac{2c^2n^{3/2}\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)}{E-\tilde V(x)}\tag{3.6.90}$$
$$e^{\frac{10\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)n^{3/2}}{E-\tilde V(x)}}\left[c\left(12\sqrt n+1\right)\frac{r_{\tilde V,E}(x)}{E-\tilde V(x)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|\frac{s^2}{2}\right.$$
$$\left.+2\sqrt n\int_0^s\int_0^\tau\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|d\sigma d\tau\right],$$

for $(s,x,w)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$.

Note that

$$\int_0^s\int_0^\tau\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|d\sigma d\tau\le s\int_0^s\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)\right|d\sigma\tag{3.6.91}$$
$$\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}\int_0^s\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(\sigma,x,w)-\sigma\frac{r_{\tilde V,E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|d\sigma$$
$$+\frac{5r_{\tilde V,E}(x)\delta(\Omega)}{c\left(\frac{E-\tilde V(x)}{c^2}\right)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|\frac{s^2}{2},$$

for $(s,x,w)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$ (we used that $t_0+\varepsilon\le\frac{5\delta(\Omega)}{c}$).

Let

$$C_3'(E,x,\tilde V,\tilde B,\Omega)=20cn^2\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)\delta(\Omega)e^{\frac{10\delta(\Omega)\beta(\tilde V,\tilde B,\Omega)n^{3/2}}{E-\tilde V(x)}}\tag{3.6.92}$$

$$\begin{aligned}
C_4'(E,x,\tilde{V},\tilde{B},\Omega) &= 2c^2n^{3/2}\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)e^{\frac{10\delta(\Omega)\beta(\tilde{V},\tilde{B},\Omega)n^{3/2}}{E-\tilde{V}(x)}} && (3.6.93)\\
&\times\left[c\left(12\sqrt{n}+1\right)\frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{E-\tilde{V}(x)}+\frac{10r_{\tilde{V},E}(x)\sqrt{n}\delta(\Omega)}{c\left(\frac{E-\tilde{V}(x)}{c^2}\right)}\right],\\
C_5'(E,x,\tilde{V},\tilde{B},\Omega) &= C_4'(E,x,\tilde{V},\tilde{B},\Omega)e^{\frac{C_3'(E,x,\tilde{V},\tilde{B},\Omega)}{E-\tilde{V}(x)}}, && (3.6.94)
\end{aligned}$$

for $x\in\Omega$.

From (3.6.90)-(3.6.94) and Gronwall's lemma (formulated in Subsection 3.6.7), it follows that

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial w^i}(s,x,w)-\frac{r_{\tilde{V},E}(x)}{\left(\frac{E-\tilde{V}(x)}{c^2}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)s\right|\leq\frac{C_5'(E,x,\tilde{V},\tilde{B},\Omega)}{E-\tilde{V}(x)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial w^i}(w)\right|\frac{s^2}{2} \tag{3.6.95}$$

for $(s,x,w)\in[0,t_0+\varepsilon[\times B(x_0,\varepsilon)\times U$.

Now we assume without loss of generality that the integer k in (3.6.78) is n, and $p_0^n>0$. We remind that $w_0\in U$ is defined by $\phi(w_0)=\frac{p_0}{|p_0|}$. We shall prove (3.6.101).

From (3.6.79), it follows that

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0) &= e_l-\frac{w_0^l}{\sqrt{1-|w_0|^2}}e_n, && (3.6.96)\\
\left|\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0)\right| &\leq \sqrt{1+n}, && (3.6.97)
\end{aligned}$$

for $l=1\ldots n-1$ and where $(e_1,\ldots,e_n)$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ and $w_0=(w_0^1,\ldots,w_0^{n-1})$ (for (3.6.97), we used the estimate $\frac{p_0^n}{|p_0|}\geq n^{-1/2}$ which implies that $1-|w_0|^2\geq\frac{1}{n}$ and we used $|w_0^l|\leq|w_0|<1$, $l=1\ldots n-1$ and we used (3.6.96)). In addition, using (3.6.96), we obtain

$$\left|\sum_{l=1}^{n-1}\mu_l\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0)\right|\geq\left|(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})\right|, \tag{3.6.98}$$

for all $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Using the fact that $\phi(w_0)\in\mathbb{S}^{n-1}$ is orthogonal to $\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0)$, $l=1\ldots n-1$, and using (3.6.98), we obtain

$$\left|\mu_1\phi(w_0)+\sum_{l=1}^{n-1}\mu_{l+1}\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0)\right|=\sqrt{\mu_1^2+\left|\sum_{l=1}^{n-1}\mu_{l+1}\frac{\partial\phi}{\partial w^l}(w_0)\right|^2}\geq n^{-1/2}\sum_{l=1}^{n}|\mu_l|, \tag{3.6.99}$$

for all $(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n$.

Note that

$$
\begin{aligned}
&\left|\lambda_1 \frac{\partial Q}{\partial t}(t_0, x_0, w_0) + \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_{l+1} \frac{\partial Q}{\partial w^l}(t_0, x_0, w_0)\right| \geq \\
&\left|\lambda_1 g(r_{\tilde{V},E}(x_0)\phi(w_0)) + \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_{l+1} \frac{c^2 r_{\tilde{V},E}(x_0) t_0}{E - \tilde{V}(x_0)} \frac{\partial \phi}{\partial w^l}(t_0, x_0, w_0)\right| \\
&-|\lambda_1| \left|\frac{\partial Q}{\partial t}(t_0, x_0, w_0) - g(r_{\tilde{V},E}(x_0)\phi(w_0))\right| \\
&-\sum_{l=1}^{n-1} |\lambda_{l+1}| \left|\frac{\partial Q}{\partial w^l}(t_0, x_0, w_0) - \frac{c^2 r_{\tilde{V},E}(x_0) t_0}{E - \tilde{V}(x_0)} \frac{\partial \phi}{\partial w^l}(t_0, x_0, w_0)\right|,
\end{aligned} \tag{3.6.100}
$$

for $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

We estimate the first term on the right-hand side of (3.6.100) by using (3.6.99) (note that $g(r_{\tilde{V},E}(x_0)\phi(w_0)) = \frac{c^2 r_{\tilde{V},E}(x_0)}{E - \tilde{V}(x_0)}\phi(w_0))$. We estimate the second term and third term on the right-hand side of (3.6.100) by using (3.6.84) and (3.6.95) and (3.6.97). Using also the estimate $t_0 \leq \frac{5\delta(\Omega)}{c}$, we finally obtain

$$
\left|\lambda_1 \frac{\partial Q}{\partial t}(t_0, x_0, w_0) + \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_{l+1} \frac{\partial Q}{\partial w^l}(t_0, x_0, w_0)\right| \geq |\lambda_1| \frac{cC_6}{\sqrt{n}} + t_0 \sum_{l=1}^{n-1} |\lambda_{l+1}| \frac{c^2 r_{\tilde{V},E}(x) C_7}{\sqrt{n}(E - \tilde{V}(x))}, \tag{3.6.101}
$$

for $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. This latter inequality and (3.6.26) and $t_0 > 0$ imply that the family $\left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t_0, x_0, w_0), \frac{\partial Q}{\partial w^1}(t_0, x_0, w_0), \ldots, \frac{\partial Q}{\partial w^{n-1}}(t_0, x_0, w_0)\right)$ is free. Then using inverse function theorem, it follows that φ_E is a local C^1 diffeomorphism at (t_0, x_0, p_0).

Proposition 3.6.3 is proved. □

3.6.9 Proof of Proposition 3.6.4

Before proving Proposition 3.6.4, we shall first prove the following Lemma 3.6.1.

Lemma 3.6.1. *Assume that*

$$
\begin{aligned}
&E \geq C_1(\tilde{V}, \tilde{B}, \Omega), \\
&C_8(E, \tilde{V}, \tilde{B}, \Omega) > 0,
\end{aligned} \tag{3.6.102}
$$

where C_1 and C_8 are defined by (3.6.8) *and* (3.6.15).

Let $x \in \Omega$ and $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$. Then

$$
\psi_2(t_{+,x,p}, x, p) \circ N(\psi_1(t_{+,x,p}, x, p)) > 0, \tag{3.6.103}
$$

where $t_{+,x,p}$ is defined by (3.6.21) *and $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ is the flow of the differential system* (3.5.1), *and where $N(y)$ denotes the unit outward normal vector of $\partial\Omega$ at $y \in \partial\Omega$ ($\circ$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^n$).*

Proof of Lemma 3.6.1. Consider the function $m \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ defined by

$$m(t) = \chi_\Omega(\psi_1(t,x,p)),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.6.104}$$

where χ_Ω is a C^2 defining function for Ω (see definition of C_8, (3.6.15)). Derivating twice (3.6.104) and using (3.5.1), we obtain

$$\begin{aligned}\ddot m(t) &= Hess\chi_\Omega(\psi_1(t,x,p))(g(\psi_2(t,x,p)), g(\psi_2(t,x,p))) \\ &+ \left(1+\frac{|\psi_2(t,x,p)|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \nabla\chi_\Omega(\psi_1(t,x,p)) \circ F\,(\psi_1(t,x,p), \\ &g(\psi_2(t,x,p))) - \frac{\psi_2(t,x,p)\circ F\,(\psi_1(t,x,p), g(\psi_2(t,x,p)))}{c^2\left(1+\frac{|\psi_2(t,x,p)|^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ &\times\nabla\chi_\Omega(\psi_1(t,x,p))\circ\psi_2(t,x,p),\end{aligned} \tag{3.6.105}$$

for $t \in \mathbb{R}$ and where g is the function defined by (3.5.6). The Taylor expansion of m at $t_{+,x,p}$ is given by

$$m(t) = \dot m(t_{+,x,p})(t-t_{+,x,p}) + \frac{1}{2}\ddot m(t_{+,x,p})(t-t_{+,x,p})^2 + o((t-t_{+,x,p})^2),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.6.106}$$

and we recall that

$$\psi_1(t_{+,x,p},x,p) \in \partial\Omega,\ \ \text{(i.e. } m(t_{+,x,p}) = 0), \tag{3.6.107}$$

$$m(t) \le 0,\ \ \text{for } t \in [0, t_{+,x,p}]. \tag{3.6.108}$$

Hence if $\dot m(t_{+,x,p}) < 0$ then (3.6.106) contradicts (3.6.108). If $\dot m(t_{+,x,p}) = 0$, then $\psi_2(t_{+,x,p},x,p) \in T_{\psi_1(t_{+,x,p},x,p)}\partial\Omega$, and from (3.6.105), (3.6.107), (3.5.2), and the estimates (3.6.6), $|g(\psi_2(t,x,p))| < c$, and definition (3.6.15), it follows that $\ddot m(t_{+,x,p}) \ge c^2 C_8(E,\tilde V,\ \tilde B, D) > 0$ (we used (3.6.29)). Hence if $\dot m(t_{+,x,p}) = 0$, then $\ddot m(t_{+,x,p}) > 0$, and (3.6.106) contradicts (3.6.108).

We finally prove that $\dot m(t_{+,x,p}) > 0$.

Lemma 3.6.1 is proved. □

Now we are ready to prove Proposition 3.6.4.

Let $x \in \Omega$. As $n \ge 2$, the set $\Omega\backslash\{x\}$ is connected and we shall prove that the set

$$\begin{aligned}A_x \ \ = \ \ &\{y \in \Omega\backslash\{x\} \mid \text{there exists } p \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E} \text{ and } t > 0 \text{ such that } (t,x,p) \in \Lambda \\ &\text{and } \psi_1(t,x,p) = y\}\end{aligned}$$

is a closed and open nonempty subset of $\Omega\backslash\{x\}$ (where $\psi = (\psi_1,\psi_2)$ is the differential flow of (3.5.1)). Then we will have $A_x = \Omega\backslash\{x\}$, which will prove Proposition 3.6.4.

Note that A_x is nonempty since for $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$, $(0,x,p) \in \Lambda$ and $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,x,p)_{|t=0} = g(p) \neq 0$. Hence there exists $\varepsilon > 0$ such that $(\varepsilon,x,p) \in \Lambda$ and $\psi_1(\varepsilon,x,p) \neq \psi_1(0,x,p) = x$.

Note also that A_x is an open subset of $\Omega\backslash\{x\}$. Let $y \in A_x$. Then there exists $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$ and $t > 0$ such that $(t, x, p) \in \Lambda$ and $\psi_1(t, x, p) = y$. From (3.6.27) and Proposition 3.6.3, it follows, in particular, that there exists an open neighborhood $U \subseteq \Omega\backslash\{x\}$ of y such that $U \subseteq A_x$.

It remains to prove that A_x is a closed subset of $\Omega\backslash\{x\}$. Consider a sequence (y_k) of points of $\Omega\backslash\{x\}$ which converges to some $y \in \Omega\backslash\{x\}$ as $k \to +\infty$. For each k, there exists $p_k \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$ and $t_k > 0$ such that $(t_k, x, p_k) \in \Lambda$ and

$$\psi_1(t_k, x, p_k) = y_k. \tag{3.6.109}$$

From Proposition 3.6.1, it follows that $t_k \in [0, \frac{5\delta(\Omega)}{c}]$ for all k. Using compactness of $[0, \frac{5\delta(\Omega)}{c}]$ and compactness of $\mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$, we can assume that (t_k) converges to some $t \in [0, \frac{5\delta(\Omega)}{c}]$ and that (p_k) converges to some $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}$. Using (3.6.109) and continuity of ψ_1, we obtain

$$y = \lim_{k\to+\infty} y_k = \lim_{k\to+\infty} \psi_1(t_k, x, p_k) = \psi_1(t, x, p). \tag{3.6.110}$$

Note that $t > 0$ since $y \neq x$. Let $s \in [0, t[$. Then using that $t_k \to t$ as $k \to +\infty$, we obtain that there exists a rank N_s such that $s < t_k$ for $k \geq N_s$. Hence $(s, x, p_k) \in \Lambda$ for $k \geq N_s$ and, in particular, $\psi_1(s, x, p_k) \in \Omega$ for $k \geq N_s$. Hence we obtain that

$$\psi_1(s, x, p) = \lim_{k\to+\infty} \psi_1(s, x, p_k) \in \bar{\Omega}, \text{ for } s \in [0, t[. \tag{3.6.111}$$

Using Lemma 3.6.1 with (3.6.110) ($y \in \Omega$) and (3.6.111), we obtain that $(t, x, p) \in \Lambda \cap \big(]0, +\infty[\times\{x\} \times \mathbb{S}^{n-1}_{x,E}\big)$ and $\psi_1(t, x, p) = y$. Hence $y \in A_x$.

Proposition 3.6.4 is proved. □

3.7 Complément

Dans cette Section, on complète l'article [Jol07b] en rajoutant des preuves de résultats non démontrés dans [Jol07b].

3.7.1 Preuve des formules (3.3.9)-(3.3.10)

On ne va démontrer que (3.3.10), l'égalité (3.3.9) se démontrant de la même manière. On omet les indices $_{V,B}$ de $s(E, ., .)$ défini au début de la Section 2, et de $\bar{k}_0(E, ., .)$ et $\bar{k}(E, ., .)$ définis par (3.3.1) ; et $\mathcal{S}_{0_E}$ désignera désormais l'action réduite définie par (3.3.6) et que l'on a noté auparavant $\mathcal{S}_{0_{V,\mathbf{A},E}}$.

De (3.5.1), on déduit que $\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = g(\psi_2) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} &= \frac{\partial}{\partial\zeta_i} g(\psi_2)(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}, &(3.7.1)\\ \psi_1(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) &= \zeta + \int_0^t g(\psi_2(s, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)))ds, &(3.7.2)\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D}$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \bar{D}$, $x \neq \zeta$, où $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ désigne le flot de (3.5.1).

De (3.7.2), il vient

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} = e_i + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \zeta_i} g(\psi_2)(s, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\zeta, x \in \bar{D}$, $\zeta \neq x$, où $(e_1, .., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi pour tous $\zeta, x \in \bar{D}$, $\zeta \neq x$ l'application, qui associe à un réel t le vecteur de $\mathbb{R}^n$ $\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}$, est de classe C^1 et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}\right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} g(\psi_2)(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}, \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

En dérivant $\psi_1(s(E, \zeta, x), \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) = x$ par rapport à ζ_i, on obtient que

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}\right)_{|t=s(E,\zeta,x)} + \frac{\partial t}{\partial \zeta_i}(E, \zeta, x)\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(s(E, \zeta, x), \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)), \tag{3.7.4}$$

pour tout $\zeta, x \in \bar{D}$, $\zeta \neq x$.

Soient $\zeta, x \in \bar{D}$, $\zeta \neq x$. De (3.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \mathcal{S}_{0_E}}{\partial \zeta_i}(\zeta, x) = P(s(E, \zeta, x), \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \tfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(s(E, \zeta, x), \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \\ &\times \tfrac{\partial s}{\partial \zeta_i}(E, \zeta, x) + \int_0^{s(E,\zeta,x)} \tfrac{\partial}{\partial \zeta_i} P(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} \circ \tfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) dt \\ &+ \int_0^{s(E,\zeta,x)} P(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \tfrac{\partial}{\partial \zeta_i}\left(\tfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))\right)_{|\zeta} dt. \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

En utilisant (3.7.3) et en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^{s(E,\zeta,x)} P(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \tfrac{\partial}{\partial \zeta_i}\left(\tfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))\right)_{|\zeta} dt \\ &= P(s(E, \zeta, x), \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \left(\tfrac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}\right)_{|t=t(E,\zeta,x)} \\ &- P_i(0, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \\ &- \int_0^{s(E,\zeta,x)} \tfrac{\partial P}{\partial t}(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \left(\tfrac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}\right) dt, \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

où $P(0, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) = (P_1(0, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)), \ldots, P_n(0, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)))$ (on a utilisé l'égalité $\psi_1(0, \zeta', k') = \zeta'$, $\zeta' \in \mathbb{R}^n$ et $k' \in \mathbb{R}^n$, pour obtenir $\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(0, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} = e_i$).

En utilisant (3.7.4)-(3.7.6), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}_{0_E}}{\partial \zeta_i}(\zeta, x) &= -P_i(0, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \qquad (3.7.7) \\ &+ \int_0^{s(E,\zeta,x)} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_i} P(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta} \circ \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \right. \\ &- \left. \frac{\partial P}{\partial t}(t, \zeta, \bar{k}_0(E, \zeta, x)) \circ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t, ., \bar{k}_0(E, ., x))_{|\zeta}\right)\right] dt. \end{aligned}$$

De (3.3.4), on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \zeta_i}P(t,.,\bar{k}_0(E,.,x))_{|\zeta}\circ\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t,\zeta,\bar{k}_0(E,\zeta,x))\\&-\frac{\partial P}{\partial t}(t,\zeta,\bar{k}_0(E,\zeta,x))\circ(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\psi_1(t,.,\bar{k}_0(E,.,x))_{|\zeta})=\\&\frac{\partial}{\partial \zeta_i}H(P(t,.,\bar{k}_0(E,.,x)),\psi_1(t,.,\bar{k}_0(E,.,x)))_{|\zeta},\end{aligned}\tag{3.7.8}$$

pour tout $t\in[0,s(E,\zeta,x)]$, où H est l'Hamiltonien défini au début de la sous-section 3.3.2. On remarque que

$$H(P(t,\zeta',\bar{k}_0(E,\zeta',x)),\psi_1(t,\zeta',\bar{k}_0(E,\zeta',x)))=E,\tag{3.7.9}$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\zeta'\in\bar{D}$, $\zeta'\neq x$. De (3.7.7)-(3.7.9), on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{S}_{0_E}}{\partial \zeta_i}(\zeta,x)=-P_i(0,\zeta,\bar{k}_0(E,\zeta,x)),\tag{3.7.10}$$

ce qui, avec (3.3.5), implique (3.3.10).

3.7.2 Preuve de la Proposition 3.3.2

Dans cette sous-section χ_D désigne une fonction définissante de D, i.e. $\chi_D\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $D=\chi_D^{-1}(]-\infty,0[)$, $\partial D=\chi_D^{-1}(\{0\})$, et pour tout $x'\in\partial D$ $\nabla\chi_D(x')\neq 0$ et la matrice Hessienne de χ_D au point x', notée $\mathrm{Hess}\chi_D(x')$, vérifie l'inégalité $Hess\chi_D(x')(v,v)>0$ pour tout $v\in T_{x'}\partial D$, $v\neq 0$ (où $T_{x'}\partial D\subseteq\mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriel tangent à ∂D au point $x'\in\partial D$).

Fixons $x\in D$. Avant de démontrer la Proposition 3.3.2, on démontre le Lemme 3.7.1 ci-dessous.

Pour $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ on note $s_x(v)$ le nombre réel strictement négatif défini par

$$s_x(v)=\sup\{s<0\mid \psi_1(s,x,-r_E(x)v)\in\partial D\}.\tag{3.7.11}$$

où $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ est le flot de (3.5.1), et où l'on note désormais par r_E le réel $r_{V,E}$ défini au tout début de la sous-section 3.3.1.

Lemme 3.7.1. *L'application s_x est de classe C^1 sur $\mathbb{S}^{n-1}$. De plus on a :*

$$\beta_x(v)=\nabla\chi_D(\psi_1(s_x(v),x,-r_E(x)v))\circ\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,x,-r_E(x)v)_{|t=s_x(v)}<0,\tag{3.7.12}$$

pour tout $v\in\mathbb{S}^{n-1}$, où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve du Lemme 3.7.1. L'estimée (3.7.12) vient de la Propriété (3.2.1). La continuité de s_x vient alors de (3.7.12) et de la continuité de ψ_1. En utilisant à nouveau (3.7.12) et à l'aide du théorème des fonctions implicites, on obtient que s_x est de classe C^1 sur $\mathbb{S}^{n-1}$ (on applique le théorème des fonctions implicites à la fonction $m(s,v)=\chi_D(\psi_1(s,x,-r_E(x)v))$, $s\in\mathbb{R},v\in\mathbb{S}^{n-1}$). □

Démontrons la Proposition 3.3.2. On omet l'indice $_{V,B}$.

Par le Lemme 3.2.1, l'application ν_E est C^1 sur $\partial D\times D$. L'application $\nu_{E,x}$ est un C^1 difféomorphisme de ∂D sur $\mathbb{S}^{n-1}$: l'application $\mu_{E,x}:\mathbb{S}^{n-1}\to\partial D$ définie par

$$\mu_{E,x}(v)=\psi_1(s_x(v),x,-r_E(x)v),\ v\in\mathbb{S}^{n-1}, \tag{3.7.13}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{S}^{n-1}$ (car $\psi_1\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ et on utilise aussi le Lemme 3.7.1) et $\mu_{E,x}$ est l'inverse de $\nu_{E,x}$.

Il reste à démontrer que $\mu_{E,x}$ préserve l'orientation (ce qui prouvera que $\nu_{E,x}$ préserve aussi l'orientation). Nous aurons besoin des fonctions $\Phi\in C^1([0,1]\times\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}^n)$ et $\bar\chi_D\in C^1(]0,1]\times(\bar D\backslash\{x\}),\mathbb{R})$ définies par :

$$\Phi(\varepsilon,v)=\psi_1(\varepsilon s_x(v),x,-r_E(x)v),\ \varepsilon\in[0,1],\ v\in\mathbb{S}^{n-1}\ ; \tag{3.7.14}$$

$$\bar\chi_D(\varepsilon,y)=\chi_D(\psi_1(-\frac{s(E,y,x)}{\varepsilon},x,\bar k(E,y,x))),\ \varepsilon\in]0,1],\ y\in\bar D\backslash\{x\}. \tag{3.7.15}$$

On remarque que de la définition de s_x et de (3.2.1), on a

$$\Phi(\varepsilon,v)\in\bar D\backslash\{x\}, \tag{3.7.16}$$

pour tous $\varepsilon\in]0,1]$ et $v\in\mathbb{S}^{n-1}$.

Soit $v_0\in\mathbb{S}^{n-1}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\phi:U\to\mathbb{S}^{n-1}$ une paramétrisation lisse de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans un voisinage ouvert de v_0 et qui respecte l'orientation de $\mathbb{S}^{n-1}$ (i.e. $\det(\phi(w),\frac{\partial\phi}{\partial w_1}(w),\ldots,\frac{\partial\phi}{\partial w_{n-1}}(w))>0$ pour tout $w\in U$). Il s'agit de démontrer

$$\det\left(\nabla_y\chi_D(y)_{|y=\mu_{E,x}(\phi(w))},\frac{\partial}{\partial w_1}\mu_{E,x}(\phi(w)),\ldots,\frac{\partial}{\partial w_{n-1}}\mu_{E,x}(\phi(w))\right)>0, \tag{3.7.17}$$

pour $w\in U$.

En utilisant (3.7.16), on définit l'application $J\in C(]0,1]\times U,\mathbb{R})$ par

$$J(\varepsilon,w)=\det\left(\nabla_y\bar\chi_D(\varepsilon,y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))},\frac{\partial}{\partial w_1}\Phi(\varepsilon,\phi(w)),\ldots,\frac{\partial}{\partial w_{n-1}}\Phi(\varepsilon,\phi(w))\right) \tag{3.7.18}$$

pour tout $\varepsilon\in]0,1]$ et $w=(w_1,\ldots,w_{n-1})\in U$. On a l'égalité suivante démontrée ci-dessous :

$$J(1,w)=\det\left(\nabla_y\chi_D(y)_{|y=\mu_{E,x}(\phi(w))},\frac{\partial}{\partial w_1}\mu_{E,x}(\phi(w)),\ldots,\frac{\partial}{\partial w_{n-1}}\mu_{E,x}(\phi(w))\right) \tag{3.7.19}$$

pour $w=(w_1,\ldots,w_{n-1})\in U$; ainsi démontrer (3.7.17) revient à démontrer $J(1,w)>0$, pour tout $w=(w_1,\ldots,w_{n-1})\in U$. Pour cela, en utilisant la continuité de J, il suffit de montrer $J(\varepsilon,w)\neq 0$ pour tous $\varepsilon\in]0,1]$, $w\in U$, et de montrer que pour tout $w\in U$, $J(\varepsilon,w)>0$ pour $\varepsilon\in]0,1]$ assez petit.

Démontrons tout d'abord (3.7.19). De la définition de $s(E, y, x)$ et $k(E, y, x)$, on obtient

$$\psi_1(-s(E, y, x), x, \bar{k}(E, y, x)) = y, \tag{3.7.20}$$

pour tout $y \in \bar{D}\backslash\{x\}$. En utilisant (3.7.20) et (3.7.15) on obtient $\bar{\chi}_D(1, y) = \chi_D(y)$, $y \in \bar{D}\backslash\{x\}$. Ainsi, en utilisant (3.7.18) et en remarquant que $\Phi(1, v) = \mu_{E,x}(v)$ pour tout $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, on obtient (3.7.19).

Démontrons que $J(\varepsilon, w) \neq 0$ pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $w \in U$, ce qui revient à démontrer que les n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon, w) &= \nabla_y \bar{\chi}_D(\varepsilon, y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} && (3.7.21)\\ C_{j+1}(\varepsilon, w) &= \frac{\partial}{\partial w_j}\Phi(\varepsilon, \phi(w)),\ j = 1 \dots n-1, && (3.7.22) \end{aligned}$$

sont linéairement indépendants pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$ et $w \in U$ ($C_m(\varepsilon, w)$, $m = 1 \dots n$, sont les colonnes de $J(\varepsilon, w)$). Pour cela , on démontre tout d'abord que les vecteurs $C_2(\varepsilon, w), \dots, C_n(\varepsilon, w)$ sont linéairement indépendants pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$ et $w \in U$; puis on démontre que le vecteur $C_1(\varepsilon, w)$ est non nul et orthogonal à $C_{j+1}(\varepsilon, w)$ pour tous $j = 1 \dots n-1$, $\varepsilon \in]0, 1]$ et $w \in U$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. On remarque que

$$k(E, y, x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = -r_E(x)\phi(w),\ w \in U. \tag{3.7.23}$$

En dérivant (3.7.23) par rapport à w_i, $i = 1 \dots n-1$, on obtient

$$\left(\nabla_y \bar{k}^j(E, y, x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} \circ \frac{\partial}{\partial w_i}\Phi(\varepsilon, \phi(w))\right)_{j=1..n} = -r_E(x)\frac{\partial \phi}{\partial w_i}(w),\ w \in U, \tag{3.7.24}$$

où $\circ$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $w \in U$. Comme $(\frac{\partial \phi}{\partial w_i}(w))_{i=1\dots n-1}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, (3.7.24) prouve que $(C_{i+1}(\varepsilon, w))_{i=1\dots n-1} = (\frac{\partial}{\partial w_i}\Phi(\varepsilon, \phi(w)))_{i=1\dots n-1}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

De (3.7.14) et (3.7.15) et de la définition de s_x et des propriétés de χ_D, on a $\bar{\chi}_D(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, \phi(w))) = \chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w)), x, -r_E(x)\phi(w))) = 0$, pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $w \in U$. Ainsi en dérivant cette égalité par rapport à w_j, $j = 1 \dots n-1$ et par rapport à ε, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial w_j}\bar{\chi}_D(\Phi(\varepsilon, \phi(w))) = C_1(\varepsilon, w) \circ C_{j+1}(\varepsilon, w), && (3.7.25)\\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, \phi(w))), && (3.7.26) \end{aligned}$$

pour tous $w = (w_1, \dots, w_{n-1})$, $\varepsilon \in]0, 1]$, $j = 1 \dots n-1$. L'égalité (3.7.25) montre que C_1 est orthogonal à C_{j+1}, $j = 1 \dots n-1$; donc, il nous reste à démontrer que $C_1(\varepsilon, w) \neq 0$ pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$ et tous $w \in U$.

De (3.7.21), (3.7.15) et (3.7.26), on a

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon, w) \circ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(\varepsilon, \phi(w)) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, \phi(w))) - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}, \end{aligned} \tag{3.7.27}$$

pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $w \in U$.

De (3.7.15), on déduit

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, y) = \frac{s(E, y, x)}{\varepsilon^2} \tag{3.7.28}$$
$$\times\nabla\chi_D(\psi_1(-\frac{s(E, y, x)}{\varepsilon}, x, \bar{k}(E, y, x))) \circ \frac{\partial}{\partial s}\psi_1(s, x, \bar{k}(E, y, x))_{s=-\frac{s(E,y,x)}{\varepsilon}},$$

pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $y \in \bar{D}\backslash\{x\}$. De (3.7.28) et (3.7.12), on a

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\chi}_D(\varepsilon, y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = \frac{-s_x(\phi(w))}{\varepsilon^2}\beta_x(\phi(w)) < 0, \tag{3.7.29}$$

pour $\varepsilon \in]0, 1]$, $w \in U$, où β_x est défini par (3.7.12). De (3.7.29) et (3.7.27), on obtient que $C_1(\varepsilon, w) \neq 0$, pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$, $w \in U$.

Finalement on a montré que $J(\varepsilon, w) \neq 0$ pour tous $\varepsilon \in]0, 1]$ et $w \in U$. Maintenant démontrons qu'à $w \in U$ fixé, $J(\varepsilon, w) > 0$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$ suffisamment petit. Fixons $w \in U$. On note $r'_E(x)$ le réel

$$r'_E(x) = \frac{r_E(x)}{\sqrt{1 + \frac{r_E(x)^2}{c^2}}}.$$

On a les égalités suivantes que l'on démontre plus bas :

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\Phi(\varepsilon, \phi(w)) = -\varepsilon r'_E(x)\left[\left(\frac{\partial}{\partial w_i}s_x(\phi(w))\right)\phi(w) + s_x(\phi(w))\frac{\partial\phi}{\partial w_i}(w)\right] + o(\varepsilon), \tag{3.7.30}$$

pour tous $i = 1 \ldots n-1$ et $\varepsilon \to 0^+$;

$$\frac{\partial\bar{\chi}_D}{\partial y_i}(\varepsilon, y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = \frac{1}{\varepsilon}\Bigg[-\frac{\beta_x(\phi(w))}{r'_E(x)}\phi_i(w) \tag{3.7.31}$$
$$+\frac{\sqrt{1 + \frac{r_E(x)^2}{c^2}}}{s_x(\phi(w))}\nabla\chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w)), x, -r_E(x)\phi(w)))$$
$$\circ\left(\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(s_x(\phi(w)), x, k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)} \circ (e_i - \phi_i(w))\phi(w)\right)_{j=1\ldots n} + o(1)\Bigg],$$

pour tous $i = 1 \dots n$ et $\varepsilon \to 0^+$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

De (3.7.18), (3.7.30) et (3.7.31), il vient

$$J(\varepsilon, w) = \varepsilon^{n-2} r_E'(x)^{n-1} \left(\Delta(w) + o(1)\right) \tag{3.7.32}$$

quand $\varepsilon \to 0^+$, où

$$\Delta(w) = \det\left(\Delta_1(w), \Delta_2(w), \dots, \Delta_n(w)\right) \tag{3.7.33}$$

et

$$\Delta_1(w) = (\Delta_1^1(w), \dots, \Delta_1^n(w)),$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1^m(w) = & -\frac{\beta_x(\phi(w))}{r_E'(x)}\phi_m(w) + \frac{\sqrt{1+\frac{r_E(x)^2}{c^2}}}{s_x(\phi(w))} \\
& \times \nabla\chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w)), x, -r_E(x)\phi(w))) \circ \left(\frac{\partial \psi_1^j}{\partial k}(s_x(\phi(w)), x, k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}\right. \\
& \left. \circ\, (e_m - \phi_m(w))\phi(w)\right)_{j=1\dots n}, \; m = 1, .., n,
\end{aligned}$$

$$\Delta_{i+1}(w) = -\left(\frac{\partial}{\partial w_i} s_x(\phi(w))\right)\phi(w) - s_x(\phi(w))\frac{\partial \phi}{\partial w_i}(w)$$

pour tout $i = 1 \dots n-1$.

On note $\mathrm{Gram}(\phi)(w)$ la matrice de Gram de taille $n-1$ et d'éléments $\frac{\partial \phi}{\partial w_i}(w) \circ \frac{\partial \phi}{\partial w_j}(w)$, $i, j = 1 \dots n-1$. Comme $(\frac{\partial \phi}{\partial w_1}(w), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial w_{n-1}}(w))$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, il vient que $\mathrm{Gram}(\phi)(w)$ est une matrice symétrique définie positive. De l'inversibilité de $\mathrm{Gram}(\phi)(w)$, on obtient, en particulier, qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} s(\phi(w)) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_{n-1}} s(\phi(w)) \end{bmatrix} = \mathrm{Gram}(\phi)(w) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.7.34}$$

On remarque que $\chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w')), x, -r_E(x)\phi(w'))) = 0$ pour tout $w' \in U$. En dérivant cette égalité par rapport à w_i, on obtient

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \beta_x(\phi(w))\frac{\partial}{\partial w_i} s_x(\phi(w)) - r_E(x)\nabla\chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w)), x, \qquad (3.7.35)\\
& -r_E(x)\phi(w))) \circ \left(\frac{\partial \psi_1^j}{\partial k}(s_x(\phi(w)), x, k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)} \circ \frac{\partial \phi}{\partial w_i}(w)\right)_{j=1\dots n}.
\end{aligned}$$

De (3.7.33), (3.7.35) et en utilisant le fait que $\phi(w)$ est orthogonal à $\frac{\partial\phi}{\partial w_m}(w)$, $m = 1 \dots n-1$, on obtient

$$\det\left(\phi(w), \frac{\partial\phi}{\partial w_1}(w), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial w_{n-1}}(w)\right)\Delta(w) = \det(\mathcal{M}(w)), \tag{3.7.36}$$

où

$$\mathcal{M}(w) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_x(w)}{r'_E(x)} & {}^t\nabla_w s_x(\phi(w)) \\ \frac{\beta_x(w)}{r'_E(x)s_x(\phi(w))}\nabla_w s_x(\phi(w)) & -s_x(\phi(w))\mathrm{Gram}(\phi(w)) \end{pmatrix}$$

et $\nabla_w s_x(\phi(w))$ (resp. ${}^t\nabla_w s_x(\phi(w))$) est le vecteur colonne (resp. vecteur ligne) de coordonnées $\frac{\partial}{\partial w_i}s_x(\phi(w))$, $i = 1 \dots n-1$. En utilisant (3.7.36) et (3.7.34) ($\mathcal{M}_1 \leftarrow \mathcal{M}_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{j-1}\mathcal{M}_j \frac{\beta_x(w)}{r'_E(x)s_x(\phi(w))^2}$ où $\mathcal{M}_j$ désigne la j^{e} colonne de $\mathcal{M}$), on obtient l'égalité

$$\det\left(\phi(w), \frac{\partial\phi}{\partial w_1}(w), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial w_{n-1}}(w)\right)\Delta(w) = \tag{3.7.37}$$
$$\frac{(-\beta_x(w))(-s_x(w))^{n-1}|\mathrm{Gram}(\phi)(w)|}{r'_E(x)}\left(1 + \frac{1}{s_x(\phi(w))^2}\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\frac{\partial}{\partial w_j}s_x(\phi(w))\right)$$

De plus, en utilisant (3.7.34), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\frac{\partial}{\partial w_j}s_x(\phi(w)) = \left|\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\frac{\partial\phi}{\partial w_j}(w)\right|^2. \tag{3.7.38}$$

En utilisant (3.7.37), (3.7.38), l'inégalité $|\mathrm{Gram}(\phi)(w)| > 0$ et le fait que la paramétrisation (U, ϕ) respecte l'orientation de $\mathbb{S}^{n-1}$, on obtient finalement $\Delta(w) > 0$ et on déduit alors de (3.7.32) l'inégalité $J(\varepsilon, w) > 0$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$ assez petit.

Démontrons les développements limités (3.7.30) et (3.7.31), ce qui achèvera la preuve de la Proposition 3.3.2.

De (3.7.14), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(\varepsilon, \phi(w))_{|\varepsilon=0} = s_x(\phi(w))\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s, x, -r_E(x)\phi(w))_{|s=0} = -r'_E(x)s_x(\phi(w))\phi(w). \tag{3.7.39}$$

En utilisant (3.7.39) et le fait que $\Phi \in C^1([0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}), \mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(\varepsilon, \phi(w)) = -r'_E(x)s_x(\phi(w))\phi(w) + o(1),\ \varepsilon \to 0^+, \tag{3.7.40}$$
$$\Phi(\varepsilon, \phi(w)) = x - \varepsilon r'_E(x)s_x(\phi(w))\phi(w) + o(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0^+. \tag{3.7.41}$$

De (3.3.9) et (3.3.13), il vient

$$\left|\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E, y, x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}\right| \le M'_2\frac{1}{|\Phi(\varepsilon, \phi(w)) - x|},$$

pour $\varepsilon\in]0,1]$, $i=1\ldots n$, $M_2'=\sqrt{n}M_2$ où M_2 est la constante apparaissant dans (3.3.13). Ainsi en utilisant aussi (3.7.41), on obtient

$$\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}=O(\frac{1}{\varepsilon}),\ \varepsilon\to 0^+, \tag{3.7.42}$$

pour tout $i=1\ldots n$.

De (3.5.1), il vient

$$\begin{aligned}\psi_1^j(t,x,k) &= x+g_j(k)t+\int_0^t[g_j(k+\int_0^\tau F(\psi_1(\sigma,x,k),\\ &\qquad g(\psi_2(\sigma,x,k)))d\sigma)-g_j(k)]d\tau\end{aligned} \tag{3.7.43}$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^n$, $j=1\ldots n$. Ainsi en dérivant (3.7.43) par rapport à k_l et en utilisant l'accroissement de ∇g, on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial\psi_1^j}{\partial k_l}(\varepsilon s_x(\phi(w)),x,k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}=\varepsilon s_x(\phi(w))\tfrac{\partial g_j}{\partial k_l}(k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}+o(\varepsilon)\\ &=\left(1+\tfrac{r_E(x)^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(\delta_j^l-\tfrac{r_E'(x)^2}{c^2}\phi_j(w)\phi_l(w)\right)\varepsilon s_x(\phi(w))+o(\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.7.44}$$

pour tous $j,l=1\ldots n$, quand $\varepsilon\to 0^+$, où $\delta_j^l=0$ si $j\neq l$ et $\delta_j^l=1$ si $j=l$ (δ_j^l désigne le symbole de Kronecker).

En utilisant (3.7.44) et l'égalité $\phi(w)\circ\frac{\partial\phi}{\partial w_i}(w)=0$ ($|\phi(w')|=1$ pour tout $w'\in U$), on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(\varepsilon s_x(\phi(w)),x,k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}\circ\frac{\partial\phi}{\partial w_i}(w)\right)_{j=1\ldots n}\\ &=\varepsilon s_x(\phi(w))\left(1+\frac{r_E(x)^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\phi}{\partial w_i}(w)+o(\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.7.45}$$

pour tout $i=1\ldots n$, $\varepsilon\to 0^+$.

En utilisant (3.7.44), (3.7.42) et le fait que $\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}$ est orthogonal à $-r_E(x)\phi(w)=\bar{k}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}$ ($|\bar{k}(E,y,x)|=r_E(x)$ qui est indépendent de $y\in\bar{D}$, $y\neq x$), on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(\varepsilon s_x(\phi(w)),x,k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}\circ\tfrac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}\right)_{j=1\ldots n}\\ &=\left(1+\tfrac{r_E(x)^2}{c^2}\right)^{-1/2}s_x(\phi(w))\varepsilon\tfrac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}+o(1),\ \varepsilon\to 0^+,\end{aligned} \tag{3.7.46}$$

pour tout $i=1\ldots n$.

En dérivant (3.7.20) par rapport à y_i, on obtient que

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial y_i}s(E,y,x)\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s,x,\bar{k}(E,y,x))_{|s=-s(E,y,x)}\\ &+\left(\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(y,x,k)_{|k=\bar{k}(E,y,x)}\circ\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)\right)_{j=1\ldots n}=e_i,\end{aligned} \tag{3.7.47}$$

pour tous $i = 1\dots n$ et $y \in \bar{D}$, $y \neq x$.

Ainsi en utilisant aussi (3.7.46) et (3.7.40), on obtient

$$\begin{aligned} &-\tfrac{\partial}{\partial y_i} s(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}(-r'_E(x)\phi(w)+o(1)) \\ &+\varepsilon s_x(\phi(w))\left(1+\tfrac{r_E(x)^2}{c^2}\right)^{-1/2}\tfrac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}+o(1)=e_i, \end{aligned} \tag{3.7.48}$$

pour tous $i = 1\dots n$ et $\varepsilon \to 0^+$.

En prenant le produit scalaire du côté gauche de (3.7.48) avec $\phi(w)$ et en utilisant le fait que $\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}$ est orthogonal à $-r_E(x)\phi(w)$, on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} s(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}(-r'_E(x)+o(1))+o(1)=\phi_i(w),$$

pour tous $i = 1\dots n$ et $\varepsilon \to 0^+$ où $\phi(w) = (\phi_1(w),\dots,\phi_n(w))$. D'où l'on a

$$\frac{\partial}{\partial y_i} s(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = \frac{\phi_i(w)}{r'_E(x)}+o(1), \tag{3.7.49}$$

pour tous $i = 1\dots n$ et $\varepsilon \to 0^+$.

En utilisant (3.7.48) et (3.7.49), on a

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = \frac{\sqrt{1+\frac{r_E(x)^2}{c^2}}}{s_x(\phi(w))}(e_i-\phi_i(w)\phi(w))+o(1) \tag{3.7.50}$$

pour tous $i = 1\dots n$ et $\varepsilon \to 0^+$.

De (3.7.14), il vient

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial w_i}\Phi(\varepsilon,\phi(w)) = \varepsilon\tfrac{\partial}{\partial w_i}(s_x(\phi(w)))\tfrac{\partial\psi_1}{\partial s}(s,x,-r_E(x)\phi(w))_{|s=\varepsilon s_x(\phi(w))} \\ &-r_E(x)\left(\tfrac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(\varepsilon s_x(\phi(w)),x,k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}\circ\tfrac{\partial\phi}{\partial w_i}(w)\right)_{j=1..n}, \end{aligned} \tag{3.7.51}$$

pour tous $\varepsilon \in [0,1]$ et $i = 1\dots n-1$. Le développement limité (3.7.30) se déduit de l'égalité (3.7.51) et de (3.7.40), (3.7.45).

De (3.7.15), il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\bar{\chi}_D}{\partial y_i}(\varepsilon,y)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))} = \nabla\chi_D(\psi_1(s_x(\phi(w)),x,-r_E(x)\phi(w))) \\ &\circ\Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial s}{\partial y_i}(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s,x,-r_E(x)\phi(w))_{|s=s_x(\phi(w))} \\ &+\left(\frac{\partial\psi_1^j}{\partial k}(s_x(\phi(w)),x,k)_{|k=-r_E(x)\phi(w)}\circ\frac{\partial\bar{k}}{\partial y_i}(E,y,x)_{|y=\Phi(\varepsilon,\phi(w))}\right)_{j=1..n}\Bigg], \end{aligned} \tag{3.7.52}$$

pour tous $\varepsilon \in]0,1]$ et $i = 1..n$. Le développement limité (3.7.31) se déduit de l'égalité (3.7.52) et de (3.7.50), (3.7.49), (3.7.12).

Annexe A

Compléments

A.1 Preuve du Lemme 1.2.1

De (1.2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
g_i(x) &= \frac{x_i}{\sqrt{1+|x|^2/c^2}} \\
\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x) &= -\frac{x_i x_j}{c^2(1+|x|^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}, && \text{(A.1.1)} \\
\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x) &= \frac{1}{c^2(1+|x|^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_i^2}{c^2(1+|x|^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}, && \text{(A.1.2)}
\end{aligned}$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1 \ldots n$, $j \neq i$.

De (A.1.1) et (A.1.2),

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x)|^2 &= \frac{1 + 2|x|^2/c^2 + |x|^4/c^4 - 2x_i^2/c^2 - |x|^2 x_i^2/c^4}{(1+|x|^2/c^2)^3}, \\
&\leq \frac{1}{1+\frac{|x|^2}{c^2}},
\end{aligned}$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $i = 1 \ldots n$, ce qui implique (1.2.10) et (1.2.11).

Soit $i, j, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq i$ et $j \neq i$. On a

$$\begin{aligned}
&|\nabla g_i(x) - \nabla g_i(y)| \leq \sup_{\varepsilon \in [0,1]} (\sum_{m=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_m} \nabla g_i((1-\varepsilon)x + \varepsilon y)|^2)^{\frac{1}{2}} |x - y| \\
&= \sup_{\varepsilon \in [0,1]} (\sum_{m,k=1}^{n} |\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_k} g_i((1-\varepsilon)x + \varepsilon y)|^2)^{\frac{1}{2}} |x - y|, && \text{(A.1.3)}
\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$; et de (A.1.1)-(A.1.2) on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} g_i(x) &= 3\frac{x_i}{c^2}\left[\frac{x_i^2/c^2 - (1+|x|^2/c^2)}{(1+|x|^2/c^2)^{\frac{5}{2}}}\right], &(A.1.4)\\
\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} g_j(x) &= \frac{x_j}{c^2}\left[\frac{3x_i^2/c^2 - (1+|x|^2/c^2)}{(1+|x|^2/c^2)^{\frac{5}{2}}}\right], &(A.1.5)\\
\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} g_j(x) &= 3\frac{x_i x_j x_l}{c^4}\frac{1}{(1+|x|^2/c^2)^{\frac{5}{2}}}, &(A.1.6)\\
\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} g_j(x) &= \frac{x_i}{c^2}\frac{3x_j^2/c^2 - (1+|x|^2/c^2)}{(1+|x|^2/c^2)^{\frac{5}{2}}}, &(A.1.7)
\end{aligned}$$

for $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

En utilisant (A.1.4)-(A.1.7) on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} g_i(x)|^2 &= \frac{-12x_i^4/c^2 - 3x_i^4|x|^2/c^4 + 8x_i^2(1+|x|^2/c^2)^2}{c^4(1+|x|^2/c^2)^5}\\
&\quad + \frac{|x|^2(1+|x|^2/c^2)^2 - 6|x|^2x_i^2(1+|x|^2/c^2)/c^2}{c^4(1+|x|^2/c^2)^5}\\
&\leq \frac{9}{c^2}\frac{1}{(1+\frac{|x|^2}{c^2})^2}, &(A.1.8)\\
\sum_{l=1}^{n} |\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} g_i(x)|^2 &= \frac{-12\frac{x_i^2 x_j^2}{c^2} - 3\frac{x_i^2 x_j^2|x|^2}{c^4} + (x_i^2 + x_j^2)(1+\frac{|x|^2}{c^2})^2}{c^4(1+\frac{|x|^2}{c^2})^5}\\
&\leq \frac{1}{c^2(1+|x|^2/c^2)^2}, &(A.1.9)
\end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, et $j \neq i$. Les inégalités (A.1.3) et (A.1.8)-(A.1.9) prouvent (1.2.12). □

A.2 Application contractante dans un espace de Banach

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats standards concernant les points fixes d'applications contractantes dans un espace de Banach.

Lemme A.2.1. *Soit (X, e) un espace métrique complet. Soit $f : (X, e) \to (X, e)$ une application strictement contractante de (X, e) dans lui-même, i.e. il existe un réel K tel que $0 \leq K < 1$ et*

$$e(f(x), f(y)) \leq K e(x, y), \text{ pour tous } x, y \in X. \qquad \text{(A.2.1)}$$

Alors il existe un et un seul $y \in X$ tel que $f(y) = y$.

Démonstration. On commence par démontrer l'unicité du point fixe. Soient x et y deux points de X tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors

$$e(x,y) = e(f(x), f(y)) \underset{(\text{A.2.1})}{\leq} Ke(x,y).$$

Comme $K < 1$, on en déduit que $e(x,y) = 0$, i.e. $x = y$.

On démontre maintenant l'existence du point fixe. Soit x un point quelconque de X. On définit la suite (x_n) de points de X par

$$\begin{aligned} x_0 &= x, \\ x_{n+1} &= f(x_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

Soient $p, n \in \mathbb{N}$, $n < p$. En utilisant (A.2.1) et (A.2.2), on a

$$\begin{aligned} e(x_n, x_p) &\leq \sum_{i=n}^{p-1} e(x_i, x_{i+1}) \leq \left(\sum_{i=n}^{p-1} K^i\right) e(x_0, x_1) \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} K^i\right) e(x_0, x_1) = K^n \frac{1}{1-K} e(x_0, x_1) \underset{(n,p)\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Finalement, la suite (x_n) est une suite de Cauchy de X ; or (X, e) étant complet, on en déduit que (x_n) est convergente. Soit y sa limite. Par passage à la limite dans (A.2.2) (f est continue par (A.2.1)), on obtient $f(y) = y$. □

Si $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ et $(\mathcal{F}, \|.\|_{\mathcal{F}})$ sont deux espaces de Banach, on notera $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, et on notera $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ définie par

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \sup_{v\in\mathcal{E}, \|v\|_{\mathcal{E}}=1} \|L(v)\|_{\mathcal{F}}.$$

Si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et $\|.\|_{\mathcal{E}} = \|.\|_{\mathcal{F}}$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}) := \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} := \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$.

Lemme A.2.2. *Soit $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ un espace de Banach. Soit $B_{\mathcal{E}}(0,1) := \{x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathcal{E}} < 1\}$. Soit $f : B_{\mathcal{E}}(0,1) \to B_{\mathcal{E}}(0,1)$. Supposons qu'il existe deux réels positifs K, K' tels que $K < 1$, $K' < 1$ et*

$$|f(x)| \leq K', \tag{A.2.3}$$

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|, \tag{A.2.4}$$

pour tout $x, x' \in B_{\mathcal{E}}(0,1)$. Alors il existe un et un seul $y \in B_{\mathcal{E}}(0,1)$ tel que $f(y) = y$.

Preuve du Lemme A.2.2. On considère l'application $h : \bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K') \to \bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K')$, $x \mapsto f(x)$, où $\bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K')$ est la boule fermée de $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ dont le centre est 0 et le rayon est K' (i.e. $\bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K') = \{x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathcal{E}} \leq K'\}$). De (A.2.3) et (A.2.4), on déduit que h est K-contractante sur $\bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K')$. Ainsi (lemme A.2.1) h admet un unique point fixe (noté x_0) dans $\bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K')$. Par définition de h, x_0 est aussi point fixe de f, et si $y \in B_{\mathcal{E}}(0,1)$ est un point fixe de f, alors en utilisant (A.2.3) on a $y \in \bar{B}_{\mathcal{E}}(0, K')$ et $g(y) = f(y) = y$, ce qui par définition de x_0 implique $y = x_0$. □

Lemme A.2.3. *Soit Ω (resp. Ω') un ouvert d'un espace de Banach $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ (resp. $(\mathcal{E}', \|.\|_{\mathcal{E}'})$). Soit $\mathcal{C} : \Omega \times \Omega' \to \Omega'$ une application de classe C^1 sur $\Omega \times \Omega'$. On suppose qu'il existe une constante réelle positive K telle que $K < 1$ et*

$$\|\mathcal{C}(x, y_1) - \mathcal{C}(x, y_2)\|_{\mathcal{E}'} \leq K \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{E}'}, \tag{A.2.5}$$

pour tous $x \in \Omega$ et $y_1, y_2 \in \Omega'$. Si

$$\text{pour tout } x \in \Omega, \text{ il existe un et un seul } f(x) \in \Omega' \text{ vérifiant } \mathcal{C}(x, f) = f, \tag{A.2.6}$$

alors l'application $f : \Omega \to \Omega', x \mapsto f(x)$, est de classe C^1 sur Ω et

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}')} \leq \frac{\|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}')|y=f(x)}}{1-K} \tag{A.2.7}$$

pour tout $x \in \Omega$, où l'on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ la différentielle de f au point x et $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x, y)$ est la différentielle partielle de f au point (x, y) par rapport à y.

Preuve du Lemme A.2.3. Soit $x \in \Omega$ et soit $y \in \Omega'$. On note $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y)$ la différentielle partielle de $\mathcal{C}$ en (x, y) par rapport au point $y \in \Omega'$ ($\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}')$). De (A.2.5), on obtient $\|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}')} \leq K < 1$. Comme $(\mathcal{L}(\mathcal{E}'), \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}')})$ est un espace de Banach, on a :

$$I_{\mathcal{E}'} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(\mathcal{E}') \tag{A.2.8}$$

($I_{\mathcal{E}'}$ est l'application identité de $\mathcal{E}'$).

On considère l'application de classe C^1 $J : \Omega \times \Omega' \to \mathcal{E}'$, $(x, y) \mapsto y - \mathcal{C}(x, y)$. On a $\frac{\partial J}{\partial y}(x, y) = I_{\mathcal{E}'} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y)$ où l'on note $\frac{\partial J}{\partial y}(x, y)$ la différentielle partielle de J au point (x, y) par rapport à $y \in \Omega'$. Finalement par (A.2.6), (A.2.8) et par le théorème des fonctions implicites, la fonction f est de classe C^1 sur un voisinage ouvert de x dans Ω (pour tout $z \in \Omega$, $J(z, f(z)) = 0$) et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = -(I_{\mathcal{E}'} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y)_{|y=f(x)})^{-1} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x, y)_{|y=f(x)},$$

d'où, avec l'inégalité $\|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}')} \leq K < 1$, on obtient (A.2.7).

□

A.3 La transformée de rayons X

Dans cette section on rappelle la définition de la transformée de rayons X pour des fonctions assez régulières et assez décroissantes à l'infini (conditions (A.3.1)). Puis on rappelle quelques propriétés de la transformée de rayons X et on donne une formule d'inversion de la transformée de rayons X (voir (A.3.10)-(A.3.12)) qui apparaît dans [FN91] et qui diffère des formules d'inversion apparaissant, par exemple, dans [Rad17, Nat86].

Considérons

$$T\mathbb{S}^{n-1} = \{(\theta, x) \mid \theta \in \mathbb{S}^{n-1},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \theta \circ x = 0\},$$

où $\mathbb{S}^{n-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On interprète $T\mathbb{S}^{n-1}$ comme l'ensemble des droites orientées de $\mathbb{R}^n$: on pense $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$ comme la droite de $\mathbb{R}^n$ orientée par θ et passant par x.

La transformée de rayons X, P, est l'application qui, à toute fonction f vérifiant

$$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ |f(x)| = O(|x|^{-\beta}),\ \text{ quand } |x| \to +\infty,\ \text{pour un réel } \beta > 1, \tag{A.3.1}$$

associe la fonction $Pf \in C(T\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^m)$ définie par

$$Pf(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\theta + x)dt,\ (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}. \tag{A.3.2}$$

Les propriétés de la transformée de rayons X et notamment le problème de reconstruction d'une fonction à partir de sa transformée de rayons X ont été largement étudiés. Pour des références beaucoup plus complètes sur ce sujet que cette courte section, nous renvoyons à [Rad17, GGG80, Nat86, FN91]. Il est possible de définir la transformée de rayons X pour des fonctions moins régulières que (A.3.1), mais ici, quand on considérera Pf, on supposera toujours que f vérifie (A.3.1).

La propriété la plus simple de P est

$$Pf(\theta, x) = Pf(-\theta, x),\ (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}.$$

Le Lemme A.3.1 ci-dessous donne d'autres propriétés de P.

Lemme A.3.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et soient*

$$f \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \tag{A.3.3}$$
$$|f(x)| \le e(f)(1 + |x|)^{-\delta(0)}, \tag{A.3.4}$$
$$\partial_x^j f(x) = O(|x|^{-\delta(|j|)}) \text{ quand } |x| \to \infty \text{ pour } |j| \le m, \tag{A.3.5}$$
$$\delta(s) > 1 + s,\quad s = 0, \dots, m. \tag{A.3.6}$$

Alors

$$Pf \in C^m(TS^{n-1}, \mathbb{R}) \tag{A.3.7}$$

et, en particulier,

$$|Pf(\theta, x)| \le \frac{2\sqrt{2}e(f)}{(\delta(0)-1)(1+|x|/\sqrt{2})^{\delta(0)-1}} \tag{A.3.8}$$

pour $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\partial_y^j Pf(\theta, A_\theta y) = O(|y|^{1-\delta(|j|)}) \quad \text{quand} \quad |y| \to \infty \tag{A.3.9}$$

pour $|j| \le m$, *pour* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, *où* A_θ *est une isométrie linéaire de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *sur* $X_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \theta \circ x = 0\}$ *(en tant que sous-espace de* $\mathbb{R}^n$*).*

Pour reconstruire f à partir de Pf, pour $n = 2$, on a les formules suivantes (voir [Nov99, FN91])

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} I_2(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} I_1(x), \tag{A.3.10}$$

$$I_j(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{S^1} \theta_j \left(p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(\theta, q)}{x\theta^\perp - q} dq\right) d\theta, \quad j = 1, 2, \tag{A.3.11}$$

$$r(\theta, q) = Pf(\theta, q\theta^\perp), \tag{A.3.12}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$, et $d\theta$ désigne la mesure euclidienne canonique sur $\mathbb{S}^1$.

De plus,

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \tfrac{f(y)}{y_1 + iy_2 - (x_1 + ix_2)} dy_1 dy_2\right), \\ I_2(x) &= \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \tfrac{f(y)}{y_1 + iy_2 - (x_1 + ix_2)} dy_1 dy_2\right). \end{aligned} \tag{A.3.13}$$

En utilisant le Lemme A.3.1 et quelques propriétés de la transformée de Hilbert H,

$$Hr(s) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(q)}{s-q} dq,$$

on montre que :

1) sous les conditions (A.3.3)-(A.3.6) avec $m = 0$, $n = 2$, Pf détermine $I_j(x)$ par les formules (A.3.11), (A.3.12) comme fonction de $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p \ge 2$;

2) sous les conditions (A.3.3)-(A.3.6) avec $m = 1$, $n = 2$, Pf détermine $I_j(x)$ par les formules (A.3.11), (A.3.12) comme fonction de $C(\mathbb{R}^2)$.

Pour reconstruire f à partir de Pf en dimension $n \ge 3$, on se ramène à la dimension 2. Explicitons. Pour reconstruire f en un point $x' \in \mathbb{R}^n$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ un plan Y contenant x'. On considère dans $T\mathbb{S}^{n-1}$ le sous-ensemble $T\mathbb{S}^1(Y)$, ensemble de tous les rayons reposant sur Y. On restreint Pf à $T\mathbb{S}^1(Y)$ et on reconstruit $f(x')$ à partir de ces données en utilisant les méthodes de reconstruction de f à partir de Pf pour $n = 2$.

A.4 Compléments de la Proposition 2.1.2

Dans cette section on complète les items (i) et (ii) de la Proposition 2.1.2 énoncée dans la section 2.1 (ce faisant on complète aussi les Propositions 2.4.2 et 2.4.4). Dans la sous-section A.4.1, on introduit deux applications linéaires Φ_0 et Φ_1. Dans la sous-section A.4.2, on étudie le noyau de Φ_0 (Proposition A.4.1). De la Proposition A.4.1 on déduit que le vecteur $w_2(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, détermine de manière unique V modulo les potentiels radiaux quand $n \geq 2$, ce qui complète l'item (i) de la Proposition 2.1.2 (où w_2 est défini par (2.1.13)). Dans la sous-section A.4.3, on étudie le noyau de Φ_1 (Proposition A.4.2). De la Proposition A.4.2 on déduit, en particulier, que le vecteur $w_2(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, détermine de manière unique B modulo les champs radiaux quand $n = 2$, ce qui complète l'item (ii) de la Proposition 2.1.2.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 2.1, ou encore dans la section 2.4, nous devons à F. Nicoleau l'idée de la preuve de la Proposition A.4.1, ainsi que la détermination modulo un champ magnétique radial de B à partir de $w_2(V, B, \theta, x)$ donné pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, quand $n = 2$ (première partie de l'énoncé de la Proposition A.4.2).

A.4.1 Deux applications linéaires Φ_0, Φ_1

Pour $k \in \mathbb{N}$ et pour une fonction $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on désigne par $N_k(f)$ l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$N_k(f) := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ j\in\mathbb{N}^n, |j|\leq k}} (1 + |x|)^{\alpha+|j|} |\partial_x^j f(x)|. \tag{A.4.1}$$

Désignons par $C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble

$$C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) := \{B' = (B'_{i,k}) \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \mid \sup_{i,k=1\ldots n} N_1(B'_{i,k}) < \infty\}. \tag{A.4.2}$$

Désignons par $C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble

$$C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{V' \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid N_2(V') < \infty\}. \tag{A.4.3}$$

De plus on note $C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui sont radiales, i.e.

$$C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{\tilde{V} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \exists m \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}^n \tilde{V}(x) = m(|x|)\}\ ; \tag{A.4.4}$$

et on note $C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $A_n(\mathbb{R})$ qui sont radiales, i.e.

$$\begin{aligned} C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \; := \; & \{B' \in C^1(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \mid \exists m \in C([0,+\infty[, A_n(\mathbb{R})) \\ & \forall x \in \mathbb{R}^n B'(x) = m(|x|)\}. \end{aligned} \tag{A.4.5}$$

On considère l'application $\Phi_0 : C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C(T\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\begin{aligned} \Phi_0(V)(\theta, x) \; = \; & -PV(\theta, x)\theta + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} \nabla V(x + \sigma\theta) d\sigma d\tau \\ & - \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} \nabla V(x + \sigma\theta) d\sigma d\tau, \end{aligned} \tag{A.4.6}$$

pour tous $V \in C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

On considère l' application linéaire $\Phi_1 : C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \to C(T\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\Phi_1(B)(\theta, x) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\tau} B(x + \sigma\theta)\theta d\sigma d\tau - \int_{0}^{+\infty}\int_{\tau}^{+\infty} B(x + \sigma\theta)\theta d\sigma d\tau, \tag{A.4.7}$$

pour tous $B \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ et $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

Lemme A.4.1. *Les applications Φ_0 et Φ_1 vérifient :*

$$\Phi_0(V)(\theta, x) \; = \; -PV(\theta, x)\theta - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \nabla V(x + \tau\theta) d\tau, \tag{A.4.8}$$

$$\Phi_1(B)(\theta, x) \; = \; - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau B(x + \tau\theta)\theta d\tau, \tag{A.4.9}$$

pour tous $V \in C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $B \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ et $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$.

Preuve du Lemme A.4.1. L'égalité (A.4.8) s'obtient de (A.4.6) par une intégration par parties. L'égalité (A.4.9) s'obtient de (A.4.7) par une intégration par parties. □

A.4.2 Le noyau de Φ_0

On a la Proposition suivante.

Proposition A.4.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, l'application Φ_0 vérifie : $ker\Phi_0 = C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Preuve de la Proposition A.4.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, de (A.4.8), on obtient

$$C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq \ker\Phi_0.$$

(voir Proposition 2.4.2).

Il nous reste à démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\ker\Phi_0 \subseteq C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \tag{A.4.10}$$

L'idée et la preuve de l'inclusion (A.4.10) est dûe à F. Nicoleau.

Commençons par démontrer l'inclusion dans le cas $n = 2$. Soit $V \in \ker\Phi_0$. On désigne par V_{ang} la fonction de $C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par

$$V_{ang}(x) = x_2\partial_{x_1}V(x) - x_1\partial_{x_2}V(x), \tag{A.4.11}$$

pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $V_{ang} \equiv 0$, ce qui, par passage aux coordonnées polaires, prouvera que $V \in C^2_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Comme $V_{ang} \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il suffit de démontrer que sa transformée de rayons X est nulle.

Soit $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^1$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Comme $V \in \ker\Phi_0$, on obtient en utilisant (A.4.8)

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau\nabla V(x + \tau\theta)d\tau - PV(\theta, x)\theta. \tag{A.4.12}$$

En utilisant tout d'abord (A.4.11), puis (A.4.12), on a

$$\begin{aligned} P(V_{ang})(\theta, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ((x_2 + \tau\theta_2)\partial_{x_1}V(x + \tau\theta) - (x_1 + \tau\theta_1)\partial_{x_2}V(x + \tau\theta))\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2\partial_{x_1}V(x + \tau\theta) - x_1\partial_{x_2}V(x + \tau\theta))\, d\tau. \end{aligned} \tag{A.4.13}$$

Comme $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^1$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $x = q(-\theta_2, \theta_1)$. Donc en utilisant (A.4.13), il vient

$$\begin{aligned} P(V_{ang})(\theta, x) &= q\int_{-\infty}^{+\infty} \theta \circ \nabla V(q(-\theta_2, \theta_1) + \tau\theta)d\tau \\ &= q\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau}V(q(-\theta_2, \theta_1) + \tau\theta)d\tau, \end{aligned}$$

i.e. ($V \in C^2_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) $P(V_{ang})(\theta, x) = 0$.

Considérons maintenant le cas $n \geq 3$. Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ tel que $|w_1| = |w_2|$. Il s'agit de démontrer que $V(w_1) = V(w_2)$. Si $w_1 = w_2$, alors $V(w_1) = V(w_2)$. Si $w_1 \neq w_2$, on considère le plan P passant par 0, w_1 et w_2. On considère $V_P \in C^2_{sh}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$V_P(y_1, y_2) = V(y_1w_1 + y_2w_2), \text{ pour tout } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{A.4.14}$$

On a, en utilisant (A.4.14) et (A.4.8)

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\nabla V_P(y + \tau\theta')d\tau = -\Bigg(&\int_{-\infty}^{+\infty} \tau w_1 \circ \nabla V(y_1w_1 + y_2w_2 + \tau\theta'_1w_1 + \tau\theta'_2w_2)d\tau\ , \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \tau w_2 \circ \nabla V(y_1w_1 + y_2w_2 + \tau\theta'_1w_1 + \tau\theta'_2w_2)d\tau\Bigg) \end{aligned}$$

$$= -\tfrac{1}{|w_1|}\left(w_1 \circ \Phi_0(V)(\theta'_1\hat{w}_1 + \theta'_2\hat{w}_2, y_1\hat{w}_1 + y_2\hat{w}_2),\right.$$
$$\left. w_2 \circ \Phi_0(V)(\theta'_1\hat{w}_1 + \theta'_2\hat{w}_2, y_1\hat{w}_1 + y_2\hat{w}_2)\right),$$

pour tout $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2) \in \mathbb{S}^1$, $y \circ \theta' = 0$, où $\hat{w}_i = \frac{w_i}{|w_i|}$, $i = 1, 2$. Comme $V \in \ker\Phi_0$, cette dernière égalité donne

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \tau \nabla V_P(y + \tau\theta')d\tau = 0, \tag{A.4.15}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ et $\theta' \in \mathbb{S}^1$, $y \circ \theta' = 0$. En utilisant (A.4.15) et (A.4.8) pour le cas de la dimension 2, et en utilisant le fait que l'inclusion (A.4.10) est démontrée dans le cas de la dimension 2, on obtient que $V_P \in C^2_{rad}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et, en particulier, on obtient

$$V(w_1) = V_P((1, 0)) = V_P((0, 1)) = V(w_2).$$

□

A.4.3 Le noyau de Φ_1

On a la Proposition suivante.

Proposition A.4.2. *Si $n = 2$, alors*

$$\begin{aligned} ker\Phi_1 &= C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \\ &= C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$, l'ensemble $C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ est inclu dans $ker\Phi_1$ mais n'est pas égal à $ker\Phi_1$.

Remarque A.4.1. Pour $n = 2$, il est vrai que $C^1(\mathbb{R}^2, A_2(\mathbb{R})) = \mathcal{F}_{mag}(\mathbb{R}^2)$. En effet soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et soit $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la fonction définie par

$$F(x) = -\int_0^1 sf(sx)\,(x_2, -x_1)\,ds,\ \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x),\ \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

où $F = (F_1, F_2)$.

Preuve de la Proposition A.4.2. Le cas $n = 2$ vient du Lemme suivant et de (A.4.9).

Lemme A.4.2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Soit* $f \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Alors*

$$f \in C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(x + \tau\theta) d\tau = 0, \text{ pour tout } (\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}.$$

Le Lemme A.4.2 est démontré plus bas.

Considérons le cas $n \geq 3$. En utilisant (A.4.9), l'inclusion $C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \subset \ker\Phi_1$ est immédiate. Montrons que $\ker\Phi_1 \neq C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R})) \cap C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$.

Soient j, k, l trois entiers compris entre 1 et n et distincts deux à deux. Soit $\beta > \frac{\alpha+2}{2}$. On pose $h(y) = (1 + |y|^2)^\beta$ et on considère le champ $B = (B_{i_1,i_2}) \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ défini par

$$B_{j,k}(y) = \frac{y_l}{h(|y|)},\ B_{k,l}(y) = \frac{y_j}{h(|y|)},\ B_{j,l}(y) = -\frac{y_k}{h(|y|)}, \tag{A.4.16}$$

et $B_{i_1,i_2}(y) = 0$ si $i_1 \notin \{j, k, l\}$, pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $B \notin C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, A_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \ker\Phi_1$. En effet, soit $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On note $\Phi_1(B)(\theta, x) = (\Phi_1^1(B)(\theta, x), \ldots, \Phi_1(B)^n(\theta, x))$. Alors de la définition de B et de (A.4.9), on a $\Phi_1^m(B)(\theta, x) = 0$ si $m \notin \{j, k, l\}$, et

$$\begin{aligned}
\Phi_1^j(B)(\theta, x) &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \tau\theta_i B_{j,i}(x + \tau\theta) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau\theta_k B_{j,k}(x + \tau\theta) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau B_{j,l}(x + \tau\theta)\theta_l d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \frac{x_l + \tau\theta_l}{h(\sqrt{|x|^2 + \tau^2})}\theta_k d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \frac{x_k + \tau\theta_k}{h(\sqrt{|x|^2 + \tau^2})}\theta_l d\tau \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et, de la même manière, $\Phi_1^k(B)(\theta, x) = \Phi_1^l(B)(\theta, x) = 0$. □

Preuve du Lemme A.4.2. Le sens $\Rightarrow$ est immédiat.

On démontre le sens $\Leftarrow$ (l'idée de la preuve est dûe à F. Nicoleau). Commençons par traiter le cas où $n = 2$. Soit $f \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(x + \tau\theta) d\tau = 0$ pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^1$, ce qui revient à supposer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(q(-\theta_2, \theta_1) + \tau\theta) d\tau = 0, \text{ pour tous } q \in \mathbb{R}, \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1. \tag{A.4.17}$$

Considérons la fonction $f_{ang} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$f_{ang}(x_1, x_2) = x_2\partial_{x_1} f(x) - x_1\partial_{x_2} f(x), \text{ pour tout } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{A.4.18}$$

Montrons que $f_{ang} \equiv 0$, ce qui, par passage aux coordonnées polaires, prouvera que $f \in C^1_{rad}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Comme $f_{ang} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $f_{ang}(x) = O(|x|^{-\alpha})$ quand $|x| \to \infty$, il suffit de démontrer que sa transformée de rayons X est nulle.

En dérivant (A.4.17) par rapport à q, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(-\theta_2, \theta_1) \circ \nabla f(q(-\theta_2, \theta_1) + \tau\theta) d\tau = 0, \tag{A.4.19}$$

pour tous $q \in \mathbb{R}$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$.

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$. De la définition de f_{ang}, on a

$$\begin{aligned} Pf_{ang}(\theta, q(-\theta_2, \theta_1)) &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \circ \nabla f(\tau\theta + q(-\theta_2, \theta_1)) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\theta_2, -\theta_1) \circ \nabla f(\tau\theta + q(-\theta_2, \theta_1)) d\tau. \end{aligned} \tag{A.4.20}$$

On remarque que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta \circ \nabla f(\tau\theta + q(-\theta_2, \theta_1)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{d\tau}(\tau\theta + q(-\theta_2, \theta_1)) d\tau = 0 \tag{A.4.21}$$

(on a utilisé le fait que $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$, dû à $f \in C^1_{sh}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$). De (A.4.19), (A.4.20) et (A.4.21), on obtient $Pf_{ang}(\theta, q(-\theta_2, \theta_1)) = 0$.

Considérons maintenant le cas $n \geq 3$. Supposons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(x + \tau\theta) d\tau = 0 \tag{A.4.22}$$

pour tout $(\theta, x) \in T\mathbb{S}^{n-1}$. Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ tel que $|w_1| = |w_2|$. Il s'agit de démontrer que $f(w_1) = f(w_2)$. Si $w_1 = w_2$, alors $f(w_1) = f(w_2)$. Si $w_1 \neq w_2$, on considère le plan P passant par 0, w_1 et w_2. On considère $f_P \in C^2_{sh}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$f_P(y_1, y_2) = f(y_1 w_1 + y_2 w_2), \text{ pour tout } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{A.4.23}$$

On a, en utilisant (A.4.23) et (A.4.22)

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \tau f_P(y + \tau\theta') d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(y_1 w_1 + y_2 w_2 + \tau(\theta'_1 w_1 + \theta'_2 w_2)) d\tau = 0,$$

pour tout $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2) \in \mathbb{S}^1$, $y \circ \theta' = 0$. Alors en utilisant ce qui a été démontré dans le cas de la dimension 2, on obtient que f_P est radiale et, en particulier, on obtient $f(w_1) = f_P((1,0)) = f_P((0,1)) = f(w_2)$. $\square$

Bibliographie

[Abe26] N. H. ABEL : Auflösung einer mechanischen Aufgabe. *J. Reine Angew. Math.*, **1**:153–157, (1826). Traduction française : Résolution d'un problème de mécanique, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel (L. Sylow, S. Lie, eds) vol.1, pp97-101, Grøndahl, Christiana (Oslo), 1881.

[AFC91] M. A. ASTABURUAGA, C. FERNANDEZ et V. H. CORTÉS : The direct and inverse problem in newtonian scattering. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **118**:119–131, (1991).

[Ari97] S. ARIANS : Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials. *J. Math. Phys.*, **36**(6):2761–2773, (1997).

[Arn78] V. I. ARNOLD : *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer Verlag New York Heidelberg Berlin, 1978.

[Bey79] G. BEYLKIN : Stability and uniqueness of the solution of the inverse kinematic problem of seismology in higher dimensions. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, **84**:3–6, (1979). Traduction anglaise : *J. Soviet Math.* **21**, 251-254 (1983).

[BG80] I. N. BERNSTEIN et M. L. GERVER : A condition for distinguishing metrics from hodograph. *Comput. Seismology*, **13**:50–73, (1980).

[DG97] J. DEREZINSKI et C. GÉRARD : *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[Ein07] A. EINSTEIN : Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, **4**:411–462, (1907).

[ER95] G. ESKIN et J. RALSTON : Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential at a fixed energy. *Comm. Math. Phys.*, **173**:199–224, (1995).

[ER97] G. ESKIN et J. RALSTON : Inverse scattering problems for the Schrödinger operators with magnetic and electric potentials. *IMA vol. Math. Appl.*, **90**:147–166, (1997).

[EW95] V. Enss et R. Weder : The geometrical approach to multidimensional inverse scattering. *J. Math. Phys.*, **36**(8):3902–3921, (1995).

[Fad56] L. D. Faddeev : Uniqueness of solution of the inverse scattering problem. *Vestnik. Leningrad. Univ.*, **11**(7):126–130, (1956).

[Fir53] O. B. Firsov : Determination of the force acting between atoms via differential effective elastic cross section. *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, **24**:279–283, (1953). Voir aussi le problème 7 de la section 18 de [LL60].

[FN91] A. S. Fokas et R. G. Novikov : Discrete analogues of $\overline{\partial}$-equation and of Radon transform. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **313**(2): 75–80, (1991).

[FR90] H. Funke et Yu. Ratis : An inverse problem for classical relativistic mechanics. *Inverse Problems*, **6**(2):13–16, (1990).

[GGG80] I. M. Gel'fand, S. G. Gindikin et M.I. Graev : Integral geometry in affine and projective spaces. *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovr. Prob. Mat.*, **16**:53–226, (1980).

[GN83] M. L. Gerver et N. S. Nadirashvili : Inverse problem of mechanics at high energies. *Comput. Seismology*, **15**:118–125, (1983).

[Hac99] G. Hachem : The Faddeev formula in the inverse scattering for Dirac operators. *Helv. Phys. Acta*, **72**(5&6):301–315, (1999).

[Her74] I. W. Herbst : Classical scattering with long range forces. *Comm. Math. Phys.*, **35**:193–214, (1974).

[HN88] G. M. Henkin et R. G. Novikov : A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering. *Inverse Problems*, **4**(5&6):103–121, (1988).

[Iso97] H. Isozaki : Inverse scattering theory for Dirac operators. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **66**(2):237–270, (1997).

[Ito95] H. T. Ito : High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operator. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **31**:1107–1133, (1995).

[Jol05a] A. Jollivet : On inverse scattering for the multidimensional relativistic Newton equation at high energies. *J. Math. Phys.*, **47**(6), 062902 (2006) (preprint math-ph/0502040, 2005).

[Jol05b] A. Jollivet : On inverse scattering in electromagnetic field in classical relativistic mechanics at high energies. *Preprint math-ph/0506008*, 2005.

[Jol06] A. Jollivet : On inverse problems for the multidimensional relativistic Newton equation at fixed energy. *Inverse Problems*, **23**(1):231–242, (2007) (preprint math-ph/0607003, 2006).

[Jol07a] A. Jollivet : On inverse scattering at high energies for the multidimensional Newton equation in electromagnetic field. *En préparation*, (2007).

[Jol07b] A. Jollivet : On inverse problems in electromagnetic field in classical mechanics at fixed energy. *J. Geom. Anal.*, **17**(2):275–320, (2007) (preprint math-ph/0701008, 2007).

[Jun97] W. Jung : Geometric approach to inverse scattering for Dirac equation. *J. Math. Phys.*, **38**(1):39–48, (1997).

[Kel76] J. B. Keller : Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, **83**:107–118, (1976).

[KKS56] J. B. Keller, I. Kay et J. Shmoys : Determination of the potential from scattering data. *Phys. Rev.*, **102**:557–559, (1956).

[LL60] L. D. Landau et E. M. Lifschitz : *Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1960.

[LL71] L. D. Landau et E. M. Lifschitz : *The classical theory of fields*. Pergamon Press, New York, 1971.

[LT87] M. Loss et B. Thaller : Scattering of particles by long-range magnetic fields. *Ann. Physics*, **176**(1):159–180, (1987).

[MR78] R. G. Muhometov et V.G. Romanov : On the problem of determining an isotropic Riemannian metric in n-dimensional space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **243**(1):41–44, (1978). Traduction anglaise : *Soviet math. Dokl.* **19**, 1330-1333 (1978).

[Nat86] F. Natterer : *The mathematics of computerized tomography*. Teubner Stuttgart, Wiley Chichester, 1986.

[Nic97] F. Nicoleau : A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbation. *Commun. partial differ. equ.*, **22**(3&4):527–553, (1997).

[Nov88] R. G. Novikov : A multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\delta\psi + (v(x) - eu(x))\psi = 0$. *Funktsional. Anal. i*, **22**(4):11–22, (1988). Traduction anglaise : *Funct. Anal. Appl.* **22** :4, 263-272 (1988).

[Nov99] R. G. Novikov : Small angle scattering and X-ray transform in classical mechanics. *Ark. Mat.*, **37**:141–169, (1999).

[Nov05] R. G. Novikov : The $\overline{\partial}$-approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, **6**(3&4):287–349, (2005).

[NSU88] A. Nachman, J. Sylvester et G. Uhlmann : An n-dimensional Borg-Levinson theorem. *Comm. Math. Phys.*, **115**(4):595–605, (1988).

[NSU95] G. Nakamura, Z. Sun et G. Uhlmann : Global identifiability for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field. *Math. Ann.*, **303**:377–388, (1995).

[Rad17] J. Radon : Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. K1*, **69**:262–267, (1917).

[RS79] M. Reed et B. Simon : *Scattering theory.* Academic Press, New York, 1979.

[Sim71] B. Simon : Wave operators for classical particle scattering. *Comm. Math. Phys.*, **23**:37–48, (1971).

[WY05] R. Weder et D. R. Yafaev : On inverse scattering at a fixed energy for potentials with a regular behaviour at infinity. *Inverse Problems*, **21**(6):1937–1952, (2005).

[Yaf92] D. R. Yafaev : *Mathematical scattering theory*, volume 105 de *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[Yaj82] K. Yajima : Classical scattering for relativistic particles. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A*, **29**:599–611, (1982).

Résumé.
Nous étudions le problème de diffusion inverse et un problème inverse de valeurs au bord pour l'équation de Newton-Einstein pluridimensionnelle décrivant le mouvement d'une particule classique relativiste dans un champ externe électromagnétique (ou gravitationnel) statique. Le cas d'une particule classique non relativiste est aussi considéré. Nous supposons que le champ externe est suffisamment régulier et suffisamment décroissant à l'infini. Tout d'abord on rappelle (et on développe) des résultats donnant l'existence et des propriétés de l'opérateur de diffusion. Puis on obtient, en particulier, l'asymptotique aux hautes énergies de l'opérateur de diffusion, et on montre que cette asymptotique détermine de manière unique (par des formules explicites) le champ externe. Enfin on obtient un théorème d'unicité à énergie fixée pour le problème inverse de valeurs au bord, et on en déduit, en particulier, qu'à énergie fixée suffisamment grande l'opérateur de diffusion détermine de manière unique le champ externe lorsque celui-ci est aussi supposé à support compact. Les résultats de cette thèse ont été obtenus en développant, en particulier, des méthodes de [Gerver-Nadirashvili, 1983] et [R. Novikov, 1999].

Mots-clés : *équation de Newton-Einstein ; problèmes de diffusion inverse ; problèmes inverses de valeurs au bord ; problème cinématique inverse ; dynamique dans un champ électromagnétique ou gravitationnel.*

Abstract.
We consider the inverse scattering problem and an inverse boundary value problem for the multidimensional Newton-Einstein equation describing the motion of a classical relativistic particle in a static external electromagnetic (or gravitational) field. The nonrelativistic case is also considered. The external field is assumed to be sufficiently regular with sufficient decay at infinity. First we recall (and develop) some results stating the existence and properties of the scattering map. Then we obtain, in particular, the high energies asymptotics of the scattering map, and we show that the external field is uniquely determined (by explicit formulas) from this asymptotics. We finally obtain an uniqueness theorem at fixed energy for the inverse boundary value problem. From this result we deduce, in particular, that at fixed and sufficiently large energy the scattering map uniquely determines the external field when this one is also assumed to be compactly supported. The results of this Ph. D. Thesis were obtained by developing, in particular, methods of [Gerver-Nadirashvili, 1983] and [R. Novikov, 1999].

Key words : *Newton-Einstein equation ; inverse scattering problems ; inverse boundary value problems ; inverse kinematic problem ; dynamics in electromagnetic or gravitational field.*